

Geschichtliches.

Cornford, F. M.: *Mathematics and dialectic in the Republic VI.—VII.* Mind 41, 37—52 u. 173—190 (1932).

I. Verf. sucht die von Plato als Noesis und Dianoia bezeichneten Erlebnisweisen zu bestimmen, die wesentlich mit dem Unterschied von Dialektik und Mathematik verknüpft sind. Der Gegensatz beider zeigt sich 1. in den Objekten (eine rein pädagogische Angelegenheit), 2. der Methode (Rolle der „Hypotheseis“), 3. — was am wichtigsten erscheint — in der Art der Denkbewegung. Noesis bedeutet hier die Aufwärtsbewegung der Intuition, Dianoia die Abwärtsbewegung der Deduktion. Die erste Bewegung ist charakterisiert durch das „Erfassen“ (*ἀπασθαι*) der „früheren“ Wahrheit von der „folgenden“ aus, einen Akt analytischer Durchdringung. Proklos (in Eucl. 211, 18ff.) vergleicht dies mit der „Analysis“ in der Geometrie, deren bewußte Handhabung ja auf Plato zurückgehen soll. Aristoteles nennt dasselbe die „Analysis eines Diagramma“ (Met. 1051a21, Eth. Nic. 1112b15—21). Endlich ist die Beschreibung der geometrischen Analysis durch Pappus (Coll. VII, introd.) zu vergleichen. Verf. beseitigt ein verbreitetes Mißverständnis der Worte *διὰ τῶν ἐξῆς ἀκολουθῶν*, die nicht die (logisch) auseinander, sondern lediglich die (ordinal) aufeinander folgenden Schritte des analytischen Verfahrens meinen. — 4. In der Art des Erlebens (Nous die klare, allumfassende Schau der Gesamtstruktur, Dianoia ein isoliertes Stück deduktiver, „diskursiver“ Überlegung). — II. Im Rahmen einer Betrachtung der Erziehungs- und Forschungsmethoden Platos wird die Rolle der Dialektik innerhalb der Mathematik behandelt. Die dialektische Aufgabe besteht im Rückgang auf das oberste Prinzip aller mathematischen Deduktion. (Es lautet: „Die Einheit ist.“ Dazu tritt das vielheitliche Prinzip der „indefiniten Dyas“. Belege: Platos „Parmenides“ und Sextus Emp., *adv. math.* 10, 258—262.) Einen direkten Bezug zu modernen Forschungsrichtungen (B. Russell u. a.) lehnt Verf. ab.

Oskar Becker (Bonn).

Lenzen, V. F.: *Archimedes theory of the lever.* Isis 17, 288—289 (1932).

● Gerstinger, Hans, Hans Oellacher und Kurt Vogel: *Griechische literarische Papyri I.* (Mitt. a. d. Papyrussammlung d. Nationalbibl., Wien [Papyrus Erzherzog Rainer]. N. S. Hrsg. v. d. Generaldirektion d. Nationalbibl. Redig. v. Hans Gerstinger. 1. Folge.) Wien: Österr. Staatsdruckerei 1932. 170 S. u. 5 Abb. RM. 12.—.

Der erste der hier edierten Papyri (Papyrus Graecus Vindobonensis 19996) besteht aus acht Bruchstücken einer Papyrusrolle mit einer durch Federzeichnungen verdeutlichten stereometrischen Aufgabensammlung, welche 38 Beispiele für die Berechnung verschiedener Körperinhalte nebst einer Reihe metrologischer Bemerkungen enthält. Dem Schriftcharakter nach ist der Papyrus in die zweite Hälfte des ersten vorchristlichen Jahrhunderts zu setzen. Die Publikation enthält: A. Beschreibung usw. des Papyrus (von H. Gerstinger); B. Text (von H. Gerstinger, mit Umschrift und Ergänzungen von K. Vogel); C. Diskussion des mathematischen Inhalts (Verwendete Berechnungsmethoden, Terminologie, Zahlzeichen, Metrologisches, Übersetzung und Kommentar; von K. Vogel). Die behandelten Aufgaben, bei denen jede Beweisführung fehlt, so daß die verwendete Berechnungsmethode jedesmal aus der Lösung herausgelesen werden muß, betreffen Würfel, Quader, Prisma, Zylinder, Pyramide und Pyramidenstumpf, Kegel und Kegeltumpf. Die historische Bedeutung des Papyrus liegt vor allem in dem Gebrauch von korrekten Formeln für das Volumen des Pyramiden- und Kegeltumpfs und in der gelegentlich vorkommenden Darstellung

des allgemeinen Bruches durch Zähler und Nenner in senkrechter Anordnung; bei den Rechnungen wird allerdings noch die ägyptische Stammbruchrechnung verwendet. Historisch merkwürdig ist außerdem auf metrologischem Gebiete die Verwendung von Untereinheiten bei Flächen- und Raummaßen, die zu den Haupteinheiten dasselbe Verhältnis haben, als es bei den entsprechenden Längenmaßen der Fall ist. Beispiel: da 1 Fuß = 16 Zoll, kommt neben dem Quadratfuß als Untereinheit $\frac{1}{16}$ Quadratfuß vor, neben dem Kubikfuß $\frac{1}{16}$ Kubikfuß. *Dijksterhuis* (Oisterwijk, Holland).

Datta, Bibhutibhusan: Nārāyaṇa's method for finding approximate value of a surd. Bull. Calcutta Math. Soc. 23, 187—194 (1931).

Nārāyaṇa (1357 n. Chr.), von dessen Bijaganita der Verf. ein unvollständiges Manuskript in Benares aufgefunden hat, gibt für die angenäherten Werte von \sqrt{N} (N keine Quadratzahl) den Quotienten der Lösungen der Pellschen Gleichung:

$$Nx^2 + 1 = y^2,$$

wobei, wenn die nichttriviale Lösung $x = p$, $y = q$ gefunden ist, nach Brahmaguptas Regel sofort die nächste Lösung durch

$$x = 2pq, \quad y = q^2 + Np^2 = 2q^2 - 1$$

gegeben ist. Als Beispiele gibt Nārāyaṇa so für $\sqrt{10}$ die Werte $\frac{19}{6}$, $\frac{721}{228}$, $\frac{27379}{8658}$ und für $\sqrt{\frac{1}{5}}$ die Werte: $\frac{9}{20}$, $\frac{161}{360}$, $\frac{2889}{6460}$. — Der Verf. bemerkt, daß diese Methode des Zurückgangs auf die Pellsche Gleichung nach Nārāyaṇa bei den Indern sich scheinbar nicht mehr findet. Jedenfalls erwähnt sie z. B. nicht Jñānarāja (1503) in seinem Siddhāntasundara, wo vielmehr die Heronische Methode befolgt ist: Ist $N = a^2 \pm r$, so ist der erste approximative Wert α_1 für \sqrt{N} :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{N}{a} \right),$$

der zweite:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \left(\alpha_1 + \frac{N}{\alpha_1} \right)$$

usw. Z. B.

$$\sqrt{8} \approx \frac{1}{2} \left(3 + \frac{8}{3} \right) = \frac{17}{6}; \quad \sqrt{8} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{17}{6} + 8 \cdot \frac{6}{17} \right) = \frac{577}{204}.$$

Diese letztere Methode ist auch von Sūryadāsa in seinem Kommentar von Bhāskaras Algebra reproduziert, desgl. von Kamalākara (1658) in seinem Siddhāntatattva-viveka wieder angegeben. — Für die Lösung der Pellschen Gleichung selbst konnte Nārāyaṇa auf die Arbeiten von Brahmagupta und Bhāskara zurückgreifen. Z. B. löste der letztere die Gleichung (worauf der Verf. in einer Fußnote besonders aufmerksam macht):

$$61x^2 + 1 = y^2$$

(mit $x = 226'153'980$ und $y = 1'766'319'049$), übrigens dieselbe Gleichung, die Fermat 1657 Frénicle vorlegte und die Euler 1732 löste. C. Müller (Hannover).

Löschner, Hans: Johannes Kepler. Sein Leben und Wirken. Hauptver. Deutsch. Ing. Tschechoslowak. Republ., Mitt. 21, 9—12, 28—31 u. 55—58 (1932).

Natucci, A.: Come si insegnava algebra nel secolo decimosesto. Period. Mat., IV. s. 12, 173—179 (1932).

Miller, G. A.: Group theory and the history of logarithms. J. Indian Math. Soc. 19, 169—172 (1932).

Rosenfeld, L.: Marcus Marci Untersuchungen über das Prisma und ihr Verhältnis zu Newtons Farbentheorie. Isis 17, 325—330 (1932).

Zusammenfassend müssen wir also feststellen, daß Marci weder über den präzisen Inhalt noch über die Bedeutung seiner beiden Sätze im Klaren war und daß seine Ausführungen als Ausgangspunkt für eine Farbentheorie unmöglich hätten benutzt werden können. *Auszug.*

Algebra und Zahlentheorie.

Newman, M. H. A.: Note on an algebraic theorem of Eddington. J. London Math. Soc. **7**, 93—99 (1932).

If $m = 2^2 p$, where p is odd, and E_1, \dots, E_m are a set of m -rowed square matrices satisfying

$$E_r^2 = -1, \quad E_r E_s + E_s E_r = 0,$$

then $M \leq 2q + 1$; and this maximum is attained. If further all the members of a maximal E -set ($M = 2q + 1$) are real or pure imaginary, say R real and I imaginary, then $R - I = -1$ or 7 . Generalisation of a theorem of Eddington, J. London Math. Soc. **7**, 58 (1932) (this Zbl. **3**, 337). van der Waerden (Leipzig).

Rutherford, D. E.: On the solution of the matrix equation $AX + XB = C$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 54—59 (1932).

The solution for X of the matrix equation $AX + XB = C$, where A, B, C are given matrices with complex elements, is equivalent to the solution of a system of linear equations for the elements of X . A solution exists uniquely if A and $-B$ have no latent root in common; otherwise there is no solution or infinitely many solutions, depending upon certain criteria involving the elements of C . *MacDuffee* (Columbus).

Weitzenböck, R.: Über die Matrixgleichung $AX + XB = C$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 60—61 (1932).

This note on the paper of Rutherford shows that if $\det A \neq 0$ and $\det B \neq 0$, a solution of the matrix equation $AX + XB = C$ can in general be written $X = \sum \alpha_{rs} A^r C B^s$ where the α_{rs} are rational functions of the elements of A and B . *MacDuffee* (Columbus).

Weitzenböck, R.: Über die Matrixgleichung $X^2 = A$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 157—161 (1932).

The method of Frobenius (S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1896**, 7—16) for solving the matrix equation $X^2 = A$ is extended so as to yield solutions which are not polynomials in A . The writer states that the method can be applied to obtain the general solution of $X^m = A$. *MacDuffee* (Columbus).

Weitzenböck, R.: Über die Matrixgleichung $XX' = A$. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **35**, 328—330 (1932).

Es werden zwei Methoden zur Lösung der Matrixgleichung $XX' = A$ angegeben, wo X' die transponierte zu X und A eine vorgegebene nichtsinguläre symmetrische Matrix bedeutet. *Grell* (Jena).

Wilson, R.: Elimnants of characteristic equations. Proc. London Math. Soc., II. s. **33**, 517—524 (1932).

Das wesentlichste Resultat der Arbeit besteht in der Aufstellung zweier Resultanten für die charakteristischen Gleichungen zweier Matrizen P und Q mittels Betrachtung der Lösungen X der Matrixgleichungen $PX = XQ$ und $QX = XP$; Ergebnisse einer früheren Arbeit [R. Wilson, The equation $p x = x q$ in a linear associative algebra; Proc. London Math. Soc., II. s. **30**, 359—366 (1930)] werden von hier aus neu beleuchtet. *Grell* (Jena).

Garver, Raymond: Determinants and the roots of an equation. J. Indian Math. Soc. **19**, 156—160 (1932).

Nach einem Satz von Borchardt ist die Anzahl der verschiedenen Wurzeln einer Gleichung $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ gleich dem Rang der Determinante

$$\begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad \left(s_i \text{ Summe der } i\text{-ten Potenzen der Wurzeln} \right)$$

die Anzahl der verschiedenen reellen Wurzeln gleich ihrer Signatur, mit anderen Worten: man bildet die Hauptunterdeterminanten der angegebenen Determinante

$$n, \begin{vmatrix} n & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}, \dots$$

bis zu der, deren Ordnung der Rang r ist, stellt ihre Vorzeichen fest und zählt die Zeichenwechsel darunter; sind deren k , so ist $r - 2k$ die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung. — Ein anderer Satz, der nach dem Verf. auf Sylvester zurückgeht, bedient sich einer andern Determinante, deren Herstellung etwas weitläufig zu beschreiben ist (man sehe etwa Weber, Lehrbuch der Algebra 1, § 85ff., oder Fricke, Lehrbuch der Algebra 1, 189). — Es wird nun gezeigt, daß die beiden Aussagen zusammenhängen und daß statt der genannten Determinanten auch die folgende

$$\begin{vmatrix} s_2 - \frac{1}{n} s_1^2 & s_3 - \frac{1}{n} s_1 s_2 & \dots & s_n - \frac{1}{n} s_1 s_{n-1} \\ s_3 - \frac{1}{n} s_2 s_1 & s_4 - \frac{1}{n} s_2^2 & \dots & s_{n+1} - \frac{1}{n} s_2 s_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n - \frac{1}{n} s_{n-1} s_1 & s_{n+1} - \frac{1}{n} s_{n-1} s_2 & \dots & s_{2n-2} - \frac{1}{n} s_{n-1}^2 \end{vmatrix}$$

verwendet werden kann, die manchmal leichter aufzustellen ist. *L. Schrutka* (Wien).

Parker, W. V.: On real symmetric determinants whose principal diagonal elements are zero. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 259–262 (1932).

Ein von L. M. Blumenthal (vgl. Zbl. 3, 51) bewiesener Satz über symmetrische Determinanten 5. Ordnung mit positiven Elementen wird dahin verallgemeinert, daß die Elemente nur reell zu sein brauchen. *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

Blumenthal, L. M.: Note on an application of metric geometry to determinants. (Rice Inst., Houston, Texas.) Bull. Amer. Math. Soc. 38, 283–288 (1932).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (vgl. Zbl. 3, 51) wird eine Fallunterscheidung genauer untersucht. *Otto Szász* (Frankfurt a. Main).

Wellstein, Julius: Vandermondesche Determinanten, Partialbruchzerlegung, Interpolationsaufgabe von Lagrange-Hermite. J. reine angew. Math. 166, 235–240 (1932).

The author obtains, by an elementary method, an explicit expression, as a quotient of two determinants, for a polynomial $\omega(\xi)$, of degree n , given the $n+1$ values $\omega^{(i)}(\alpha_j) = u_{i,j}$ ($i \geq 0$) at certain points α_j (Lagrange-Hermite interpolation polynomial). The discussion (carried out for $n=5$) is based on the transformation and the evaluation of a certain generalized Vandermonde determinant. The formulae thus obtained further yield expressions, also in determinant form, for the coefficients in the partial fractions development

$$\frac{\omega(\xi)}{\varphi(\xi)} = \sum_{i,j} \frac{B_{i,j}}{(\xi - \alpha_j)^i} \quad \left(\varphi(\xi) = \prod_j (\xi - \alpha_j)^{l_j}; \sum_j l_j = n+1; l_j \geq 1 \right)$$

J. Shohat (Philadelphia).

Bernstein, B. A., and Nemo Debely: A practical method for the modular representation of finite operations and relations. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 110–114 (1932).

A function $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $m \geq 1$, is called a unit-zero function with respect to the sequence a_1, a_2, \dots, a_m if $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 1$ or 0 according as the equalities $x_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) do or do not all hold. Such a function f is denoted by $(x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_m)_p$ provided that it is a polynomial modulo p , this being the class of functions with which the authors are concerned. Then

$$(x; a)_p = 1 - (x - a)^{p-1} \bmod p, \quad (x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_m)_p = (x_1; a_1)_p \dots (x_m; a_m)_p.$$

Let K be a class of n elements, denoted by $0, 1, \dots, n-1$; let O be an operation changing some or all of these K -elements into such elements. The representations

of operations O and relations R in K are given in five cases (I) to (V). (I) O a K -closing m -ary operation, n a prime p . There is a K element $e_{a_1 a_2 \dots a_m}$ for every sequence a_1, a_2, \dots, a_m of K . Then O is represented by the function

$$\sum_{a_1=0}^{p-1} \dots \sum_{a_m=0}^{p-1} e_{a_1 \dots a_m} (x_1, \dots, x_m; a_1, \dots, a_m)_p.$$

Similar representations of operations and relations are given also in the following cases. (II) O an m -ary operation not K -closing, n a prime p . (III) O an m -ary operation in K , n not prime. (IV) R an m -adic relation in K , n a prime p . (V) R an m -adic relation in K , n not prime.

R. D. Carmichael (Urbana).

Miller, G. A.: A few desirable modifications in the literature of group theory. *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 319—323 (1932).

Es werden einige ungenaue und falsche Definitionen aus der Gruppentheorie erwähnt und richtiggestellt, die in älteren vielgelesenen Werken zu finden sind. Es handelt sich u. a. um die Definitionen der mehrfach transitiven Gruppen, der imprimitiven Gruppen und einen Satz über Automorphismengruppen.

St. Pietrkowski (Erlangen).

Séguier, de: Sur les classes de substitutions d'ordre 2 des groupes linéaire, quadratique, hermitien et gauche dans un champ de Galois d'ordre impair. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **194**, 1433—1435 (1932).

Es handelt sich um eine Aufzählung (ohne Beweis) der im Titel genannten Substitutionenklassen. Da schon in der Angabe der Bezeichnungen offenbar eine große Zahl von Druckfehlern und Lücken auftreten, konnte der Referent Näheres nicht ermitteln.

St. Pietrkowski (Erlangen).

Lehmer, D. H.: A ternary analogue of Abelian groups. *Amer. J. Math.* **54**, 329 bis 338 (1932).

In einer Abelschen Gruppe ist jedem Paar von Elementen ein drittes, das Produkt der beiden ersten, zugeordnet. Verf. betrachtet in Verallgemeinerung hiervon ein System („Triplex“) von Elementen, in welchem jedem Tripel von Elementen a, b, c eindeutig ein viertes, das „Produkt“ $a \cdot b \cdot c$ zugeordnet ist. Von dieser Zuordnung wird in Verallgemeinerung der Postulate für Abelsche Gruppen gefordert: 1. daß $(a b c) d e = d (a b c) e = (a b d) c e = \dots$ ist, d. h. im wesentlichen, daß man ein „Produkt“ $a b c d e$ ohne Klammern und unabhängig von der Reihenfolge der Elemente erklären kann. 2. Die Gleichung $a b x = c$ hat stets genau eine Lösung x . — Diese ist dann eindeutig bestimmt, und die Lösung x von $a b x = b$ hängt nur von a ab. $x = a'$ heißt assoziiert zu a . $a' b' c' = (a b c)'$, $(a')' = a$. Es werden zahlreiche Parallelen und Beziehungen zu Abelschen Gruppen und mehrere Beispiele gegeben. Besonders erwähnt sei: Ein Triplex läßt sich auf genau soviel Arten als „Erweiterung“ einer Abelschen Gruppe auffassen, als es Elemente enthält, die gleich ihrem assoziierten sind. Dabei heißt ein Triplex Erweiterung („extension“) einer Abelschen Gruppe, wenn sich seine Elemente so als Gruppenelemente auffassen lassen, daß das Produkt dreier Elemente in der Gruppe gerade das entsprechende Triplexelement ist. Falls die Zahl der Elemente endlich und ungerade ist, ist eine solche Erweiterung stets möglich. *Magnus*.

Haar, Alfred: Über die Gruppencharaktere gewisser unendlichen Gruppen. *Acta Litt. Sci. Szeged* **5**, 172—186 (1932).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. **1**, 55) hat der Verf. die Theorie der Gruppencharaktere für abzählbare Abelsche Gruppen entwickelt. Hier wird nun die Theorie auf solche abzählbare nicht-Abelsche Gruppen übertragen, in denen jede Klasse von konjugierten Elementen nur aus endlich vielen Elementen besteht. Zuerst wird eine neue elementare Begründung der Theorie der Charaktere endlicher Gruppen gegeben, in welcher diese Theorie von der Darstellungstheorie losgelöst erscheint. Die dabei benutzte Schlußweise, die gleichzeitige Hauptachsentransformation aller Summen von Matrizen der regulären Darstellung, wobei immer über eine Klasse konjugierter Gruppen-

elemente summiert wird, läßt sich auf unendliche Gruppen der angegebenen Art übertragen. Man findet so zu jeder Klasse konjugierter Elemente \mathfrak{C}_p eine komplexwertige Funktion $\chi_p(u)$ einer reellen Veränderlichen u im Intervall $0 \leq u \leq 1$, welche die Rolle der Charaktere der Klasse \mathfrak{C}_p übernimmt. Inverse Klassen haben dabei konjugiert-komplexe Charaktere, und es gelten die aus der Frobeniusschen Theorie bekannten Gleichungen

$$\chi_p(u) \chi_q(u) = \sum c_{pqr} \chi_r(u).$$

Es gelten weiter die üblichen Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen.

van der Waerden (Leipzig).

Herbrand †, Jacques: Zur Theorie der algebraischen Funktionen. (Aus Briefen an E. Noether.) Math. Ann. 106, 502 (1932).

Bei algebraischen Funktionenkörpern einer Veränderlichen läßt sich bekanntlich vermöge transzendenter Methoden die Existenz Galoischer Erweiterungskörper nachweisen, für die Verzweigungsstellen und Monodromiegruppe vorgegeben sind, wobei das Produkt aller Verzweigungssubstitutionen gleich der Einheit sein muß. Herbrand wirft die Frage auf, inwieweit diese Resultate erhalten bleiben, wenn als Koeffizientenbereich an Stelle aller komplexen Zahlen ein beliebiger Körper zugrunde gelegt wird. Er teilt mit, daß er diese Frage gelöst hat, indem er den Koeffizientenbereich bestimmen kann, der hinreichend ist, damit Galoissche Gruppe und Monodromiegruppe übereinstimmen. Bei Gruppen ohne Zentrum handelt es sich um rein arithmetische Untersuchungen, für Abelsche Gruppen muß er die Theorie der Abelschen Funktionen heranziehen. — Leider hat sich im Nachlaß nichts über diese wichtigen Untersuchungen gefunden.

E. Noether (Göttingen).

Bush, Laurens Earle: On the equivalence of the decompositions of an algebra with respect to a principal idempotent. Amer. J. Math. 54, 419–424 (1932).

Von der gewöhnlichen Idempotent-Zerlegung $\mathfrak{A} = u\mathfrak{A}u + u\mathfrak{B} + \mathfrak{B}u + \mathfrak{J}$ einer nicht-nilpotenten Algebra \mathfrak{A} über einem unendlichen Körper nach einem ausgezeichneten Idempotent u gelangt man durch Zerlegung $u\mathfrak{A}u = \mathfrak{S} + \mathfrak{N}$ in eine gewisse halbeinfache Teilalgebra \mathfrak{S} von \mathfrak{A} und das Radikal \mathfrak{N} von $u\mathfrak{A}u$ zu einer Zerlegung

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{N} + u\mathfrak{B} + \mathfrak{B}u + \mathfrak{J};$$

zwei solche Zerlegungen bezüglich der ausgezeichneten Idempotenten u_1 und u_2 heißen äquivalent, wenn ein Ringautomorphismus von \mathfrak{A} existiert, bei dem die entsprechenden Komponenten der Zerlegungen ineinander übergehen. Es wird zunächst eine charakteristische Äquivalenzbedingung aufgestellt; weiterhin werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die sämtlichen Zerlegungen nach ausgezeichneten Idempotenten einer vorgegebenen äquivalent sind. Schließlich wird noch gezeigt, daß bei Existenz eines einseitigen Einselementes der Multiplikation alle Zerlegungen nach ausgezeichneten Idempotenten untereinander äquivalent sind.

Grell (Jena).

Spampinato, Nicolò: Algebra elementari, teoria delle semialgebre e cieli pseudo-riemanniani. Note Esercit. mat. 6, 107–245 (1931).

In der in letzter Zeit insbesondere durch A. Albert mit hyperkomplexen Methoden behandelten Theorie der Riemann-Matrizen fehlten noch vor allem für die Rosatischen Formeln über den Multiplikabilitäts- und Singularitätsindex rein algebraische Beweise; sie werden u. a. hier auf diesem Wege vom Verf. erbracht. — I. Teil: Vorbereitungen aus der Theorie der Algebren. Sind die halbeinfachen Bestandteile \mathfrak{A}_i der halbeinfachen Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_m$ über einem Unterkörper Γ desjenigen aller komplexen Zahlen direktes Produkt $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{D}_i \times \mathfrak{M}_i$ einer Divisionsalgebra \mathfrak{D}_i und des vollen Matrizenrings ν_i -ten Grades über Γ , so ist $\mathfrak{J} = \mathfrak{M}_1 + \dots + \mathfrak{M}_m$ als fundamentale Unter algebra von \mathfrak{A} und deren Durchschnitt \mathfrak{K} mit dem Zentrum \mathfrak{Z} von \mathfrak{A} als Kern von \mathfrak{A} erklärt. Das Element x aus \mathfrak{A} heißt fundamental, wenn es bez. Γ einer Minimalgleichung vom Grade $\nu = \nu_1 + \dots + \nu_m$ (= Fundamentalzahl von \mathfrak{A}) genügt, die als skalares Polynom über Γ in Γ in lauter getrennte Linearfaktoren zerfällt. Eine Divisionsalgebra \mathfrak{D} über dem reellen Körper Δ heißt elementar, wenn sie

2 Elemente ε und γ folgender Art enthält: 1. ε ist Fundamentelement für die mit dem Körper P aller reellen Zahlen gebildete halbeinfache Algebra $\mathfrak{D}_P = \mathfrak{D}'$ über P ; 2. γ ist Fundamentelement für den Kern \mathfrak{K}' von \mathfrak{D}' . Einfache Algebren heißen elementar, wenn die ihnen nach Wedderburn zugeordnete Divisionsalgebra elementar ist. Dann wird bewiesen: Sei die einfache elementare Algebra \mathfrak{A} über Δ von der Ordnung n und der Fundamentalzah ν , d. h. voller Matrizenring ν -ten Grades in einer Divisionsalgebra der Ordnung $s = \frac{n}{\nu^2}$; es zerfalle die mit dem Körper P gebildete halbeinfache Algebra $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_P$ in m' zweiseitig einfache Bestandteile; dann ist wenigstens eine der Zahlen $\frac{s}{m'}$, $\frac{s}{2m'}$, $\frac{s}{4m'}$ Quadrat einer natürlichen Zahl. Der Rang ϱ (= Grad der Minimalgleichung des allgemeinen Elementes) von \mathfrak{A} ist gleich ν' (= Fundamentalzah von \mathfrak{A}') oder gleich $2\nu'$. Im Fall $\varrho = \nu$ wird \mathfrak{A}' direkte Summe von m' vollen Matrizenringen vom Grade $\sqrt{\frac{n}{m'}}$ über P ; bei $\varrho = 2\nu'$ direkte Summe von m' einfachen Algebren, deren jede entweder direktes Produkt einer Divisionsalgebra der Ordnung 2 und eines vollen Matrizenringes vom Grade $\sqrt{\frac{n}{2m'}}$ oder einer Divisionsalgebra der Ordnung 4 und eines vollen Matrizenringes vom Grade $\sqrt{\frac{n}{4m'}}$ über P ist. — II. Teil: Semigruppen und -Algebren; Theorie der Zykeln. Eine Semigruppe \mathfrak{S} der Potenz σ in \mathfrak{A} ist eine die Null enthaltende Untermenge von \mathfrak{A} derart, daß das Produkt von je $\sigma + 1$ Elementen aus \mathfrak{S} wieder zu \mathfrak{S} gehört, während die Produkte $\neq 0$ von r Elementen aus \mathfrak{S} ($r \leq \sigma$) zu keiner der Mengen \mathfrak{S} , $\mathfrak{S}^2, \dots, \mathfrak{S}^{r-1}$ gehören (\mathfrak{S}^t = Gesamtheit der Produkte von je t Elementen aus \mathfrak{S}). Semigruppen, die Moduleigenschaft gegenüber der Addition besitzen, heißen Semialgebren. Sei D der Modul aller m -Tupel (x_1, \dots, x_m) von Zahlen eines Körpers Γ . Dann heißt ein System (D_1, \dots, D_σ) von Untermoduln D_j untereinander gleichen Ranges von D ein Zyklus der Ordnung σ bez. des Unterkörpers Γ' von Γ , wenn eine nichtsinguläre Matrix π mit Elementen aus Γ' existiert, die D_1 in D_2 , D_2 in D_3 , \dots , D_σ in D_1 transformiert. Der Modul \mathfrak{S} aller solchen π ist eine Semialgebra der Potenz σ im vollen Matrizenring m -ten Grades über Γ' . Zwei m -Tupel (a_1, \dots, a_m) und (b_1, \dots, b_m) heißen konjugiert, wenn $\sum a_i b_i = 0$; zwei Moduln D_1 und D'_1 heißen assoziiert, wenn jedes m -Tupel von D_1 konjugiert zu jedem von D'_1 . — III. Teil: Theorie der pseudo-Riemannschen Zykeln in einem reellen Körper Δ . Sie sind definiert als Zykeln (D_1, D'_1) der Ordnung 2 aus zueinander assoziierten Untermoduln D_1, D'_1 des Systems aller m -Tupel aus Δ ; es wird $m = 2p$ und p der gemeinsame Rang von D_1 und D'_1 ; ferner gibt es in der zum Zyklus gehörigen Semialgebra \mathfrak{S} eine nichtsinguläre schiefsymmetrische Matrix π und in D_1 weiterhin p linear unabhängige $2p$ -Tupel $a^{(1)}, \dots, a^{(p)}$, so daß $a^{(r)} \cdot \pi \cdot \bar{a}^{(s)}_{-1} = -2i \alpha_{rs}$ ($\bar{a}^{(s)}_{-1}$ die transponierte der zu $a^{(s)}$ konjugiert-komplexen Matrix $\bar{a}^{(s)}$; $\alpha_{rs} = 0$ für $r \neq s$; α_{rr} dauernd gleich 1 oder dauernd gleich -1). Ein wichtiges Resultat Rosatis ergibt sich nun als Existenzsatz eines gewissen Systems in dem eine Algebra über Δ bildenden \mathfrak{S}^2 des durch den Zykel bestimmten \mathfrak{S} . Der Zusammenhang zwischen pseudo-Riemannschen Zykeln und Matrizen wird hergestellt: jeder solche Zykel bestimmt eine Klasse links-äquivalenter Matrizen und umgekehrt. Nachdem die Verbindung zwischen den aus der früheren Theorie bekannten Pseudoachsen und den Idempotenten von \mathfrak{S}^2 und andern allein aus dem Zykel abgeleiteten Algebren klargestellt ist, ergeben sich u. a. rasch die Rosatischen Formeln; ihre Zusammenstellung macht den Inhalt der hier wegen ihrer Länge nicht wiederzugebenden Fundamentalsätze II und III der Arbeit aus.

Grell (Jena).

Davies, O. L.: Note on normal division algebras. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 537—538 (1932).

Eine normale Divisionsalgebra der Ordnung n^2 über einem beliebigen Körper K der Charakteristik Null heißt vom Typus R , wenn sie einen K umfassenden (kommu-

tativen) Galoisschen Körper von der Ordnung n über K enthält; sie heißt zyklisch, wenn dessen Galoisgruppe zyklisch ist. Während für den Fall, daß K endlicher algebraischer Zahlkörper ist, alle über K endlichen normalen Divisionsalgebren zyklisch sind [siehe R. Brauer-H. Hasse-E. Noether, Beweis eines Hauptsatzes in der Theorie der Algebren, J. reine angew. Math. **167**, 399—404 (1931); dies. Zbl. **3**, 244], ist dies nach A. Albert bei allgemeinerem K nicht der Fall. Hier werden nun die auf Grund A. Albertscher und R. Brauerscher Resultate naheliegenden Folgerungen ausgesprochen: 1. Alle normalen Divisionsalgebren der Ordnung 36 über K sind zyklisch. 2. Ist m das Produkt $m = p_1 \dots p_r$ von lauter voneinander verschiedenen Primzahlen p_i , so sind alle normalen Divisionsalgebren vom Typ R und der Ordnung m^2 über K zyklisch. Grell (Jena).

Bell, E. T.: On the degree of generality of a class of arithmetical identities. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 263—268 (1932).

Es wird von einem Satz von Uspensky (zuerst in den Mitt. math. Ges. Kharkoff veröffentlicht, s. Fortschr. Math. **48**, 1350) und einem von Oppenheim (Quart. J. Math., Oxford Ser. **2**, 230—233; vgl. dies. Zbl. **2**, 328) gezeigt, daß jeder die Folge des andern ist. L. Schrutka (Wien).

Carlitz, Leonard: Note on diophantine automorphisms. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 246—250 (1932).

Carlitz, Leonard: New diophantine automorphisms. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 271—276 (1932).

Wenn eine Form f in x_1, \dots, x_n die Eigenschaft hat, durch eine Substitution $x_i \rightarrow X_i$ (x_1, \dots, x_n) in f^h transformiert zu werden:

$$f(X_1, \dots, X_n) = f^h(x_1, \dots, x_n),$$

so heißt diese Substitution ein diophantisches Automorphismus von f . In der ersten Note werden nun solche diophantische Automorphismen betrachtet, welche die Gestalt

$$X_i = \sum c_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \left| \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \right| \neq 0 \quad (1)$$

haben. (Spezialfälle solcher Automorphismen sind von Eisenstein und Cayley angegeben worden.) Es wird bewiesen: 1. Die Transformation (1) ist eine Cremona-Transformation, dessen Quadrat eine lineare Transformation ist. 2. Die Hessesche Kovariante von f hat die Gestalt

$$H[f] = \beta f^{\frac{n(k-2)}{k}}.$$

Aus 2. folgt: $k/2n$. — In der zweiten Note werden diophantische Automorphismen konstruiert, welche nicht die Form (2) haben. Ist φ eine binäre Form vom Grade δ mit Koeffizienten α_v , weiter $q = q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2$ eine quadratische Kovariante von φ , so geht φ durch die Substitution

$$x_1 = X_1q_{12} + X_2q_{22}; \quad x_2 = -X_1q_{11} - X_2q_{21}$$

über in eine Form Φ mit Koeffizienten

$$A_v = A_v(a_0, \dots, a_\delta), \quad (2)$$

und die Substitution (2) ist ein diophantischer Automorphismus für die Diskriminante ψ der Form q . Auch in diesem Fall definiert (2) eine Cremona-Transformation der Periode 2. van der Waerden (Leipzig).

Mordell, L. J.: Note on the diophantine equation $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$. Bull. Amer. Math. Soc. **38**, 277—282 (1932).

a, b, c, d seien von Null verschiedene quadratfreie ganze Zahlen, von denen keine drei einen von 1 verschiedenen gemeinsamen Teiler haben. Unter diesen Voraussetzungen wird ein System notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür aufgestellt, daß die Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0$$

Lösungen in nicht sämtlich verschwindenden ganzen Zahlen x, y, z, t besitzt. In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 1, 120) hatte Verf. mit einer sehr elementaren Methode ein anderes System von Lösbarkeitsbedingungen aufgestellt, das notwendig und hinreichend ist, wenn den Lösungen noch eine gewisse Beschränkung auferlegt wird. Jetzt zeigt er, wie seine frühere Methode zu ergänzen ist, um die damals gemachte Beschränkung zu beseitigen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Davenport, H.: On the distribution of l -th power residues (mod p). J. London Math. Soc. 7, 117—121 (1932).

p sei eine ungerade Primzahl, $l (> 1)$ ein Teiler von $p - 1$, ϱ eine primitive Wurzel (mod p) und η eine primitive l -te Einheitswurzel. Hinsichtlich ihres l -ten Potenzcharakters zerfallen die zu p teilerfremden Zahlen bekanntlich in l Klassen; als i -te Klasse C_i seien diejenigen Zahlen x bezeichnet, für die es ein z gibt, so daß $x \cdot \varrho^{i-1} \equiv z^l \pmod{p}$, d. h. $\text{ind } x \equiv 1 - i \pmod{l}$ ist. Der i -ten Klasse sei die l -te Einheitswurzel $\eta_i = \eta^{i-1}$ als Kennzeichen zugeordnet. Bezeichnet dann $\chi(x)$ den Charakter

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \equiv 0 \pmod{p} \\ \eta^{\text{ind } x}, & \text{wenn } x \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

und $\chi_i(x)$ den Charakter $\chi^i(x)$, so gehört x dann und nur dann der Klasse C_i an, wenn $\eta_i \chi(x) = 1$ ist. Hiernach ist

$$1 + \eta_i \chi_1(x) + \eta_i^2 \chi_2(x) + \dots + \eta_i^{l-1} \chi_{l-1}(x) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } x \equiv 0 \pmod{p}, \\ l, & \text{wenn } x \text{ der Klasse } C_i \text{ angehört,} \\ 0, & \text{wenn } x \text{ einer der Klassen } C_1, \dots, C_{i-1}, C_{i+1}, \dots, C_l \text{ angehört.} \end{cases}$$

Es sei jetzt n eine natürliche Zahl $\leq p - 1$ und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ irgend n l -te Einheitswurzeln. Die Anzahl der x , für die die Zahlen $x, x + 1, x + 2, \dots, x + n - 1$ bzw. den durch die Einheitswurzeln $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ gekennzeichneten Klassen angehören, beträgt dann

$$E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \frac{1}{p^n} \sum_{x=1}^{p-n} \prod_{r=1}^n \{1 + \varepsilon_r \chi_1(x + r - 1) + \dots + \varepsilon_r^{l-1} \chi_{l-1}(x + r - 1)\}.$$

Auf Grund dieser wichtigen Formel leitet Verf. durch genauere Untersuchung der auf der rechten Seite vorkommenden Verbindungen von Charakteren Abschätzungen für die linke Seite her, aus denen als Beispiel sein Theorem 3. hervorgehoben sei:

$$E(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \frac{p}{l^3} + 3\vartheta p^{3/4} + 3\vartheta'. \quad (|\vartheta| \leq 1, |\vartheta'| \leq 1)$$

Hieraus zieht er die merkwürdige Folgerung „Ist l irgendeine natürliche Zahl und p irgendeine Primzahl ($p \equiv 1 \pmod{l}$) größer als $100 l^2$, so gibt es mindestens drei konsequente l -te Potenzreste mod p .“

Bessel-Hagen (Bonn).

Mignosi, G.: Sulla equazione dell'Ottica. Rend. Circ. mat. Palermo 55, 456—476 (1931).

Es handelt sich um die unbestimmte Gleichung $1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n = 1/a$. Für den Fall $n = 3$ hat der Verf. in den Rendiconti del seminario della facoltà di scienze di Cagliari 1, Nr 4, 97—107 (1931) (vgl. nachst. Referat) ein arithmetisches Verfahren zur Bestimmung der Lösungen angegeben. Hier wird der allgemeine Fall erledigt. Man setze $A_0 = a$, $A_r = A_{r-1}(A_{r-1} + \lambda_r)$ ($r = 1, 2, \dots, n - 2$), dann genügen die Ausdrücke

$$x_1 = \frac{A_0 + \lambda_1}{\lambda_0}, \quad x_2 = \frac{A_1 + \lambda_2}{\lambda_0 \lambda_1}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{A_{n-2} + \lambda_{n-1}}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2}}, \quad x_n = \frac{A_{n-2} + \lambda_n}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2}}$$

(man beachte die abweichende Form des letzten Ausdrucks), wo $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$ ganze positive Zahlen aus den Spielräumen

$$1 \leq \lambda_1 \leq (n-1)A_0, \quad 1 \leq \lambda_2 \leq (n-2)A_1, \quad \dots, \quad 1 \leq \lambda_{n-2} \leq 2A_{n-3}$$

und λ_{n-1}, λ_n komplementäre Teiler von A_{n-2}^2 bedeuten, der gegebenen Gleichung. Insbesondere sind darin alle Lösungen in ganzen positiven Zahlen enthalten, wenn man nur diejenigen Werte der λ verwendet, bei denen die angezeigten Divisionen aufgehen. Dabei ergeben sich offenbar durch Vertauschung der x_1, x_2, \dots, x_n untereinander noch weitere Lösungssysteme. Dieser Darstellung aller Lösungssysteme kann noch eine andere Form erteilt werden, wenn man die gegebene Gleichung in die Form

$$\frac{1}{a+h_1} + \frac{1}{a+h_2} + \dots + \frac{1}{a+h_n} = \frac{1}{a} \quad (*)$$

bringt. Die Umformung

$$\frac{1}{h_1(a+h_2)} + \dots + \frac{1}{h_1(a+h_n)} = \frac{1}{a^2 + ah_1}$$

ermöglicht die Verknüpfung mit dem Fall von $n-1$ Unbekannten. — Der kleinste Wert des Produkts $h_1 h_2 \dots h_n$ der Lösungen von (*) ist $(n-1)^n a^n$; er tritt (und zwar für $n > 2$ nur) bei dem Lösungssystem $h_1 = h_2 = \dots = h_n = (n-1)a$ auf. Auch die anderen symmetrischen Grundfunktionen der h nehmen bei diesem Lösungssystem ihre kleinsten Werte an. Der größte Wert des Produkts $h_1 h_2 \dots h_n$ ist $(a_0 + 1)(a_1 + 1) \dots (a_{n-2} + 1) a_{n-1}$; er tritt (und zwar für $n > 2$ nur) bei dem Lösungssystem $h_1 = a_0 + 1, h_2 = a_1 + 1, \dots, h_{n-1} = a_{n-2} + 1, h_n = a_{n-1}$ auf. Auch die anderen symmetrischen Grundfunktionen der h nehmen bei diesem Lösungssystem ihre größten Werte an. Hierbei ist $a_0 = 0, a_r = (a_{r-1} + a)^2 + a_{r-1}$ ($r = 1, 2, \dots, n-1$). — Um endlich alle Lösungen von (*) in ganzen positiven Zahlen (bis auf die Anordnung) zu erhalten, hat man für jede Zahl t aus dem Spielraum $(n-1)^n a^{n-2} \leq t \leq (a_0 + 1)(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_{n-2} + 1) a_{n-1} : a^2$ die Zerlegungen der Zahl $a^2 t$ in n Faktoren h_1, h_2, \dots, h_n ($h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n$) zu bilden, und diejenigen beizubehalten, die die Beziehung $(n-2)\sigma_1 a^{n-3} + (n-3)\sigma_2 a^{n-4} + \dots + 2\sigma_{n-3} a + \sigma_{n-2} = t - (n-1)a^{n-3}$ erfüllen, wo $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ die symmetrischen Grundfunktionen der h bedeuten.

L. Schrutka (Wien).

Mignosi, G.: Sulla equazione dell'ottica. Nota I. Rend. Semin. Sci. Univ. Cagliari 1, 97—107 (1931).

Die Ergebnisse dieses Aufsatzes sind sämtlich auch in dem später abgefaßten, aber früher in den Rend. Circ. mat. Palermo 55, 456—476 erschienenen (vgl. vorst. Referat) enthalten; sie betreffen vornehmlich die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ der Gleichung $1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n = 1/x$.

L. Schrutka (Wien).

Corput, J. G. van der: Über Dreiecke mit rationalen Seiten und rationalen Winkelhalbierenden. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1388—1394 (1931).

In this paper the author points out the insufficiency of the method of J. Cunliffe (Dickson's History of the Theory of Numbers 2, 210) for obtaining a triangle with rational sides and angle-bisectors by the juxtaposition of three pairs of congruent triangles. This process in general does not give a triangle, but a hexagon. The author proceeds to show that the rationality of the sides and angle-bisectors of a triangle implies the rationality of $\tan \frac{1}{4} A, \tan \frac{1}{4} B, \tan \frac{1}{4} C$, the bisectors of the exterior angles, the area of the triangle, the radii of the circumscribed, inscribed, and escribed circles, and the 12 lines joining the centers of these circles with the vertices of the triangle. As a converse proposition he proves that if in the triangle ABC , $\tan \frac{1}{4} A, \tan \frac{1}{4} B$, and any one side are rational, then all sides and angle-bisectors are rational. In the problem of finding all such triangles we may assume with no loss of generality that the desired triangle is „primitive“. The author then establishes the following theorem: The primitive isosceles triangle whose sides are a, a, c , has rational angle-bisectors if and only if there exist integers m, n of different parity for which $m > n$ and

$$a = (m^2 + n^2)^2, \quad c = 2(m^2 - 2mn - n^2)(m^2 + 2mn - n^2).$$

To obtain a primitive scalene triangle with rational angle-bisectors, the author superimposes two isosceles triangles with equal heights so that their heights coincide. There

results a pair of scalene triangles of the type desired. Conversely every such triangle can be obtained in this way. There are 63 primitive isosceles triangles whose equal sides are < 160000 and which have rational angle-bisectors. From this set it is possible to find more than 1000 scalene triangles by the method just described. *Lehmer.*

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Froda, Alexandre: Sur la distribution des propriétés de voisinage des fonctions de variables réelles. Bull. math. soc. Roum. sci. **32**, 105—202 (1931).

The article consists almost entirely of results already known or rather obviously deducible from known results, and, in chapter V, of certain generalizations, via abstraction, of what precedes. — Examples of theorems proved in the text: p. 120. Une fonction uniforme de variable réelle ne peut présenter, qu'un ensemble fini ou dénombrable de discontinuités de première espèce. — p. 152. Une fonction uniforme $f(P)$ de n variables réelles ne peut présenter qu'un ensemble fini ou dénombrable de maximum strict atteint. — p. 172. Sauf pour un ensemble fini ou dénombrable de points A , toute valeur $f(A)$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables au point A , c'est une des valeurs limites de $f(P)$ en A . — p. 181. Sauf pour un ensemble exceptionnel E de classe K de points A , toute valeur $f(A)$ d'une fonction uniforme ou multiforme $f(P)$ de n variables réelles en A , c'est une des valeurs limites de $f(P)$ en A , lorsqu'on néglige les ensembles de classe K . [The class K may be virtually taken to be either (a) the class of finite or denumerable sets; or (b) the class of exhaustible sets; or (c) the class of sets of measure zero.] *Blumberg* (Columbus, Ohio).

Poprougénko, G.: Sur l'analyticité des ensembles (A). Fundam. Math. **18**, 77—84 (1932).

Beweis, daß jede der drei folgenden Eigenschaften für die Analytizität der Menge E reeller Zahlen charakteristisch ist: 1. E ist die Menge der Werte der Ableitung (soweit diese existiert) einer stetigen Funktion. 2. E ist die Menge der Werte der Ableitung einer additiven absolut stetigen Intervallfunktion. 3. E ist die Menge der Randwerte einer harmonischen Funktion. *Reinhold Baer* (Halle a. S.).

Natanson, Isidore: Sur la représentation des fonctions aux points de continuité approximative par des intégrales singulières. Fundam. Math. **18**, 99—109 (1932).

L'auteur donne la démonstration détaillée, indiquée seulement par M. Lebesgue, Ann. Toulouse (3) **1** (1909), du théorème: „Soit $\varphi_n(t, x)$ un noyau, défini dans le carré

$(a, b; a, b)$. Pour que la relation: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t, x) dt = f(x)$ ait lieu quelle que soit

la fonction $f(t)$ (mesurable et bornée), en tous les points x où $f(t)$ est approximativement continue, il faut et il suffit que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n(t, x) dt = 1$ quelque soit l'ensemble E de densité 1 au point x .”

Cependant il est impossible de construire un noyau $\varphi_n(t, x)$ tel

que la relation: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t, x) dt = f(x)$ ait lieu pour chaque fonction $f(t)$, de p -ième puissance ($p > 1$) sommable, en tout point où elle est approximativement continue.

J. Ridder (Groningen).

Braun, Stefanja: Sur une propriété caractéristique des ensembles $G_{\delta\sigma\delta}$. Fundam. Math. **18**, 138—147 (1932).

Définition: E étant un ensemble plan donné, l'ensemble $\varphi(E)$ [l'ensemble $f(E)$] contiendra seulement tous les nombres réels a tels que la droite $x = a$ rencontre E en un ensemble fini (resp. en un ensemble dénombrable dont les ordonnées constituent une suite tendant vers $+\infty$). Principaux résultats: 1. Pour qu'un ensemble linéaire H soit un $G_{\delta\sigma\delta}$, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble plan fermé E tel que $\varphi(E) = H$ [ou bien: tel que $f(E) = H$]; 2. Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble G_{δ} plan E tel que $\varphi(E) = H$ [tel que $f(E) = H$], il faut et il suffit que H soit complémentaire d'un ensemble analytique; 3. Pour qu'il existe pour un ensemble linéaire H un ensemble plan projectif E de classe P_{ξ} (ξ étant un nombre ordinal $< \Omega$), tel que $f(E) = H$, il faut et il suffit que H soit une différence de deux ensembles pro-

jectifs de classe P_ξ ; 4. Si E est un ensemble projectif plan de classe C_ξ ($\xi < \Omega$), $f(E)$ est une différence de deux ensembles linéaires projectifs de classe $P_{\xi+1}$. — Voir pour la définition des ensembles projectifs de classe P_ξ et C_ξ Kantorowitch e. Livenson, C. R. Acad. Sci., Paris **190**, 1114 (1930). *Ridder* (Groningen).

Kuratowski, Casimir: Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés. Fundam. Math. **18**, 148—159 (1932).

Si la fonction $F(x)$ admet comme valeurs des sous-ensembles fermés (non-vides) d'un espace métrique et compact Y , $F(x)$ est semi-continue supérieurement (resp. inférieurement), lorsque la condition $\lim x_n = x_0$ entraîne $Ls F(x_n) \subset F(x_0)$ [resp. $Li F(x_n) \supset F(x_0)$], le symbole „ $Ls A_n$ “ désignant la limite topologique supérieure de la suite A_1, A_2, \dots (c.-à-d. l'ensemble des points de la forme $\lim_{n=\infty} p_{k_n}$, où $p_{k_n} \in A_{k_n}$ et $k_1 < k_2 < \dots$). L'auteur démontre e. a.: a) Toute fonction semi-continue est mesurable B de classe 1 (c.-à-d. que, quelque soit l'ensemble ouvert G , l'ensemble $E[F(x) \in G]$ est un F_σ); b) $F_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ étant une suite décroissante de fonctions semi-continue supérieurement [c.-à-d. que $F_1(x) \supset F_2(x) \supset \dots$], la fonction $\text{Lim } F_n(x)$ est également semi-continue supérieurement; c) La famille des arcs simples et celle des courbes simples fermées, situées dans un espace compact X , est toujours de classe F_σ dans l'espace 2^X (c.-à-d. l'espace des sous-ensembles fermés non-vides de l'espace X).

J. Ridder (Groningen).

Kuratowski, C., et E. Szpilrajn: Sur les cribles fermés et leurs applications. Fundam. Math. **18**, 160—170 (1932).

Die Lusinsche Sieboperation $\Gamma_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{R})$ („opération du crible“; für Definitionen und Symbolik vgl. dies Zbl. **3**, 153—154) wird zunächst dadurch verallgemeinert, daß \mathfrak{R} als eine Klasse von Teilmengen eines kombinatorischen Produktes $X \times Y$ zweier unabzählbarer metrischer Räume X und Y , \mathfrak{E} als eine Teilmengenklasse des Raumes Y und $\Gamma_{\mathfrak{E}}(\mathfrak{R})$ als eine solche des Raumes X vorausgesetzt werden, wobei Y kompakt und X sogar nur vollständig und separabel anzunehmen sind. Indem ferner die Klassen sämtlicher abgeschlossener Teilmengen von $X \times Y$ bzw. von Y als metrische Räume, und zwar mit der Hausdorffschen Metrik (s. Mengenlehre **1927**, 145) betrachtet und mit $2^{X \times Y}$ bzw. mit 2^Y bezeichnet werden, setzen die Verf. fest $\mathfrak{R} = F = 2^{X \times Y}$, dagegen variabel $\mathfrak{E} \subset 2^Y$, und untersuchen die Beziehungen zwischen den topologischen Eigenschaften der Mengen $G_E \Gamma_{\mathfrak{E}}(F)$, als der Teilmengen von X , und denen der Mengenkategorie \mathfrak{E} , als einer Teilmenge des Raumes 2^Y . Unter wesentlicher Benutzung der Sätze von Kuratowski über halbstetige Funktionen im Raume abgeschlossener Mengen (Fundam. Math. **18**, 148—159 vorst. Referat) beweisen die Verf. folgenden allgemeinen Satz (Th. 5): Damit alle Elemente G von $\Gamma_{\mathfrak{E}}(F)$ Borelsche bzw. analytische Mengen seien, ist es notwendig und hinreichend, daß \mathfrak{E} eine Borelsche bzw. analytische Menge im Raume 2^Y bilde. Sind insbesondere X und Y die Koordinatenachsen der euklidischen Ebene und $\Gamma_{\mathfrak{E}}(F) = A$ = Klasse sämtlicher analytischer linearer Mengen, so (wegen der Existenz einer nichtanalytischen linearen Menge) bildet \mathfrak{E} im Raume 2^Y eine analytische nicht-Borelsche Menge. Anwendungen: bekanntlich (vgl. dies. Zbl. **3**, 153, Zeilen 5 und 7 der Tabelle) bei $\mathfrak{E} = \{> \alpha\}$ = Klasse der unabzählbaren, sowie bei $\mathfrak{E} = \{> \omega^*\}$ = Klasse der nicht wohlgeordneten Mengen ist $\Gamma_{\mathfrak{E}}(F) = A$. Die Verf. beweisen dasselbe bei \mathfrak{E} = Klasse der linearen Punktmengen, die mindestens einen irrationalen Punkt enthalten. Demnach ergibt \mathfrak{E} in allen drei Fällen einfache Beispiele von analytischen nicht-Borelschen Mengen (in 2^Y). Bis jetzt wurde dies nur vom ersten Beispiel bekannt [s. W. Hurewicz, Fundam. Math. **15**, 4 bis 17 (1930), wo es übrigens auf einem anderen Wege bewiesen ist]. *B. Knaster*.

Kantorowitch, L.: Un exemple d'une fonction semicontinue, universelle pour les fonctions continues. Fundam. Math. **18**, 178—181 (1932).

Es wird eine nach unten halbstetige Funktion $F(x, t)$ der beiden Variablen x und t ($0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$) konstruiert, die in x stetig ist und folgende Eigenschaft besitzt:

zu jeder positiven, stetigen Funktion $y = f(x) > 0$ ($0 \leq x \leq 1$) gibt es einen Wert $t = t'$ derart, daß

$$F(x, t') = f(x). \quad (0 \leq x \leq 1)$$

Beim Beweise wird der Weierstrasssche Approximationssatz benutzt. *O. Szász.*

Gagaëff, B.: Sur les suites convergentes de fonctions mesurables B. Fundam. Math. 18, 182—188 (1932).

In Verallgemeinerung eines Satzes von Arzelà über Folgen stetiger Funktionen wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, daß der Grenzwert einer konvergenten Folge (B)-meßbarer Funktionen von der Klasse α gleichfalls zur Klasse α gehört.

Otto Szász (Frankfurt a. Main).

Sierpiński, W.: Généralisation d'un théorème de Cantor concernant les ensembles ordonnés dénombrables. Fundam. Math. 18, 280—284 (1932).

Ein einfacher und unmittelbarer Beweis mit Hilfe des Wohlordnungssatzes des folgenden Sonderfalles von Hausdorffschen Sätzen über Normaltypen (Grundzüge der Mengenlehre, S. 180—185, Leipzig 1914): Es gibt eine universale geordnete Menge U von der Mächtigkeit 2^{\aleph_0} , die zu jeder geordneten Menge G von der Mächtigkeit \aleph_1 eine ähnliche Teilmenge enthält. Es wird außerdem bemerkt, daß unter Hinzufügung der Kontinuumhypothese die Mächtigkeit \aleph_1 von G in der obigen Formulierung ebenfalls durch 2^{\aleph_0} ersetzt werden kann und daß die Frage, ob die dadurch erhaltene Formulierung ihrerseits die Kontinuumhypothese zur Folge hat, also mit derselben äquivalent ist, noch offen bleibt.

B. Knaster (Warszawa).

Sierpiński, W.: Remarques sur un théorème de M. Fréchet. Mh. Math. Phys. 39, 233—238 (1932).

The following theorem is due to Fréchet: If

$$(1) \quad f^m(x) = \lim_n f_n^m(x) \quad \text{and} \quad (2) \quad f(x) = \lim_m f^m(x)$$

at every point of an interval I , then there exist two sequences $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ such that

$$f(x) = \lim_k f_{n_k}^{m_k}(x) \quad (3)$$

almost everywhere. This theorem was proved under the assumption that the functions $f_n^m(x)$ are measurable, and Sierpinski proves now that it cannot be extended to quite arbitrary functions. But a stronger and more unexpected result is established by the author under the hypothesis of Cantor ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$): There exists a double sequence of functions $f_n^m(x)$ satisfying the conditions (1) and (2) everywhere in I , and such that the equality (3) holds for every two sequences $\{m_k\}$, $\{n_k\}$ on an at most denumerable set. This shows that the theorem of Fréchet cannot be extended to arbitrary functions even if the condition (3) were required to hold except at a set of interior measure zero.

Saks (Providence).

Viola, T.: Sul principio di approssimazione di B. Levi nella teoria della misura degli aggregati e in quella dell'integrale di Lebesgue. Boll. Un. Mat. Ital. 11, 74—78 (1932).

Wie in einer früheren Arbeit (Zbl. 3, 152) wird mit Hilfe eines Approximationsprinzips von B. Levi ein Satz der Punktmengenlehre bewiesen. *Otto Szász.*

Radaković, Th.: Über verallgemeinerte Darbouxsehe Funktionen. Mh. Math. Phys. 39, 229—232 (1932).

In einer früheren Arbeit (Mh. f. Math. 38, 117—122, vgl. dies. Zbl. 1, 329, daselbst auch Definitionen) bewies Verf., daß die stetigen Funktionen die einzigen im Darbouxschen Sinne stetigen Funktionen sind, welche zu jeder im Darbouxschen Sinne stetigen Funktion addiert eine verallgemeinerte Darbouxsehe Funktion ergeben. In der vorliegenden Note wird eine verallgemeinerte Darbouxsehe Funktion konstruiert, welche nicht als Summe einer stetigen und einer im Darbouxschen Sinne stetigen Funktion darstellbar ist. Ferner wird durch eine einfache Bemerkung gezeigt,

daß alle verallgemeinerten Darboux'schen Funktionen, welche nicht im Darboux'schen Sinne stetig sind, von mindestens zweiter Bairescher Klasse sein müssen.

Birnbäum (Wien).

Ridder, J.: Über die Bedingung (N) von Lusin und das allgemeine Denjoy'sche Integral. Math. Z. 35, 51—57 (1932).

A continuous function $y = f(x)$ satisfies the condition (N) of Lusin if to every set of measure zero of values of x there corresponds a set of y of the same measure. If a function $f(x)$ is an indefinite Denjoy integral it verifies the condition (N). The author proves the following theorem which is in a certain sense the converse: if $f(x)$ satisfies the property (N) and its generalized upper derivative has a generalized Perron majorant, then $f(x)$ is an indefinite integral in the Denjoy (general) sense. The notion of the generalized Perron majorant was introduced by the author in a former paper (cf. this Zbl. 2, 386). $g(x)$ is a generalised upper derivative of $f(x)$ in (a, b) if there exists a decomposition of (a, b) into a sequence of perfect sets H_i such that in every H_i $g(x)$ is almost everywhere the ordinary upper derivative of $f(x)$ with respect to H_i . Saks.

Ridder, J.: Quelques théorèmes sur les fonctions primitives. Nieuw Arch. Wiskde 17, 169—172 (1932).

L'auteur prouve trois théorèmes concernant l'intégrale de M. Denjoy. „I. Soit $F(x)$ une fonction continue dans un intervalle I et soit $\{P_k\}$ un système d'ensembles parfaits couvrant I à un ensemble au plus dénombrable près. Si $F(x)$ possède par rapport à ces ensembles, sauf aux points d'un sous-ensemble au plus dénombrable, un nombre dérivé extrême fini, alors $F(x)$ est une totale indéfinie de Denjoy. II. Soit $F(x)$ une totale indéfinie au sens de M. Denjoy. Soit $g(x)$ une fonction finie presque partout dans (a, b) dont on sait qu'elle coïncide presque partout dans cet intervalle avec un des nombres dérivés extrêmes de $F(x)$ par rapport à un des ensembles parfaits $\{P_k\}$ ($k = 1, 2, \dots$) couvrant presque partout (a, b) . Alors $F(x)$ est la totale indéfinie de $g(x)$. III. La construction de la totale de $g(x)$ sur (a, b) exige l'emploi d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits $\{P_k\}$ sur chacun desquels $g(x)$ est sommable, tandis que les variations absolues de la totale indéfinie dans les intervalles contigus forment une série convergente. Une fonction continue $F(x)$ possèdera sur chaque P_k en tout point, sauf en ceux d'un sous-ensemble tout au plus dénombrable, un dérivé médian ou extrême fini d'un côté invariable et par rapport à ce P_k coïncidant presque partout sur P_k avec $g(x)$. Alors $F(x)$ sera résoluble et une totale indéfinie de $g(x)$.“ — L'énoncé de ce dernier théorème n'est pas tout-à-fait clair. Il semble que l'auteur emploie ici la totale indéfinie au sens restreint (de Denjoy-Perron) bien que, dans les deux théorèmes précédents cette même intégrale soit nécessairement entendue au sens large (de Denjoy-Khintchine). Par conséquent, le théorème III est contenu dans le théorème suivant plus général et plus simple à la fois: si une fonction continue $F(x)$ possède en chaque point, à un ensemble tout au plus dénombrable près, un dérivé médian $f(x)$ d'un côté invariable fini et intégrable au sens de Perron-Denjoy, alors $F(x)$ est l'intégrale indéfinie de $f(x)$ au même sens. Saks.

Analysis.

Buhl, A.: Mouvements multiponctuels correspondant à l'équation de Jacobi écrite pour le cas d'un seul point. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1562—1564 (1932).

Favard, J.: Sur les zéros réels des polynômes. Bull. Soc. Math. France 59, 229 bis 255 (1931).

If $\{c_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $c_0 > 0$) is a given sequence of real constants, a necessary and sufficient condition in order that every polynomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \quad (1)$$

such that

$$a_0c_0 + a_1c_1 + \dots + a_mc_m = 0 \quad (2)$$

shall have at least one root in the interval (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, is that the moment problem

$$\int_a^b x^n d\Psi(x) = c_n \quad (3)$$

has a solution. Suppose that (3) has a solution with infinitely many points of increase, and let $\Phi_n(x)$ be the normalized Tchebycheff polynomial of degree n corresponding to $\Psi(x)$. Then if $m \leq 2n - 1$, a polynomial $f(x)$ satisfying (2) changes its sign at least once between the least and the greatest roots of $\Phi_n(x)$, and this limitation is the best possible. Various applications and discussion of possible extensions to two dimensions.

E. Hille (Princeton, N. J.).

Fekete, Michel: Le nombre des changements de signe d'une fonction dans un intervalle et ses moments. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1430–1433 (1932).

Es sei $f(x)$ reell und stetig für $0 \leq x \leq a$ ($0 < a < \infty$); man betrachte die unendliche Folge der Momente $\int_0^a f(x) x^\nu dx$, $\nu = 0, 1, 2, \dots$. Sei $z\{f\}$ die Anzahl der verschwindenden Glieder dieser Folge, $u\{f\}$ die Anzahl der nichtverschwindenden Glieder, auf die unmittelbar ein Glied von entgegengesetztem Vorzeichen folgt. In Verallgemeinerung bekannter Sätze wird bewiesen: die Funktion $f(x)$ ($\neq 0$) hat mindestens $z + u$ Vorzeichenwechsel, wenn x das Intervall $(0, a)$ durchläuft.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Hildebrandt, T. H.: On the moment problem for a finite interval. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 269–270 (1932).

Hausdorff und Schoenberg haben gezeigt: Für die Existenz einer Funktion $\chi(t)$ von beschränkter Schwankung, so daß $\mu_n = \int_0^1 t^n d\chi(t)$ für alle n gilt, ist notwendig und hinreichend, daß die Folge $\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} |\Delta^{n-m} \mu_m|$ beschränkt ($\leq M$) ist. — Daß die

Bedingung hinreichend ist, wird hier kurz folgendermaßen gezeigt: Die zunächst für Polynome $P_k(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$ definierte Operation $U(P_k) = \sum_{i=0}^k a_i \mu_i$ kann wegen der obigen Bedingung mit Hilfe von Bernsteinpolynomen auf beliebige stetige Funktionen $f(t)$ so erweitert werden, daß $|U(f)| \leq \text{Max } |f| \cdot M$ gilt. Dann folgt die Existenz der Funktion $\chi(t)$ nach dem Satze von Riesz.

Friedrichs (Braunschweig).

Bogoljubov, N.: Sur l'approximation trigonométrique des fonctions dans l'intervalle infini. I. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 1, 23–54 (1931).

I. Soient $\tau_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$ ($s = -m, -m+1, \dots, m$) ($m = 1, 2, \dots$) deux suites (les $p_s^{(m)}$ sont complexes), telles que

$$\tau_{s+1}^{(m)} - \tau_s^{(m)} \geq \alpha > 0, \quad |\tau_{\pm m}^{(m)}| \leq A m, \quad \sum_{-m}^m |p_s^{(m)}|^2 m \leq B. \quad (1)$$

Soit, d'autre part, $f_m(t)$ ($-\infty < t < \infty$, $m = 1, 2, \dots$) une suite de fonctions telles que

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^Q |f_m(t)|^2 dt \leq C \quad \text{pour } Q \geq A m; \quad (2)$$

l'auteur démontre que toute fonction $F(t)$ qui possède la propriété

$$\int_0^t F(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t F_{m_k}(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\sum_{-m_k}^{m_k} p_s^{(m_k)} f_{m_k}(t + \tau_s^{(m_k)}) \right] dt, \quad (3)$$

cette convergence étant uniforme dans chaque intervalle $t_0 < t < t_1$, — est telle qu'on

peut lui faire correspondre une fonction $\Phi(\lambda)$, à variation bornée dans chaque intervalle fini, et telle que lorsque $A \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, l'expression

$$\int_{t-1}^{t+1} \left| F(t) - \int_{-M}^A e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) \right|^2 dt$$

tend vers 0 uniformément pour $-\infty < t < \infty$. L'auteur démontre d'ailleurs l'existence d'une suite m_k telle que la limite uniforme (dans chaque intervalle fini) de (3) existe. Ceci résulte d'un théorème du Mémoire d'après lequel si la suite $f_n(t)$ vérifie

pour chaque $L > 0$ à l'inégalité $\int_{-L}^L |f_n(t)|^2 dt < A_L^2$, alors il existe une fonction

$f(t)$ et une suite n_1, n_2, \dots telles qu'on ait uniformément dans chaque intervalle fini $\int_0^t f_{n_k}(t) dt \rightarrow \int_0^t f(t) dt$ et $\int_{-L}^L |f(t)|^2 dt < A_L^2$. Or la suite $F_n(t)$ ($m_n = n$ dans (3))

possède la propriété précitée. L'auteur emploie aussi une généralisation d'un théorème de M. Hilbert concernant les suites de fonctions à variation bornée. — Si aux condi-

tions de I on ajoute la suivante: $\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^Q |f'_m(t)|^2 dt \leq D$, on peut, alors, faire corres-

pondre à $F(t)$ une fonction $\Phi(\lambda)$ à variation bornée telle qu'on ait uniformément sur tout axe réel $\int_{-M}^A e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda) \rightarrow F(t)$, $M, A \rightarrow \infty$. — Considérons en même temps

que les suites $\tau_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, deux autres suites: $\delta_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$ vérifiant les mêmes inégalités que les suites précédentes; $f_m(t)$ étant une suite vérifiant (2), soit $F(t)$ vérifiant la condition

$$\int_0^t F(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \left[\sum_{-m_k}^{m_k} p_s^{(m_k)} q_r^{(m_k)} f_{m_k}(t + \tau_s^{(m_k)} + \delta_r^{(m_k)}) \right] dt.$$

— On peut faire correspondre à $F(t)$ deux suites A_n et λ_n telles qu'on ait uniformément pour $-\infty < t < \infty$:

$$\int_{t-1}^{t+1} \left| \sum_{-M \leq \lambda_k \leq A} A_k e^{i\lambda_k t} - F(t) \right|^2 dt \rightarrow 0, \quad M, A \rightarrow \infty.$$

Quelques inadvertances se sont glissées dans les démonstrations.

Mandelbrojt.

Bogoliubov, N.: Sur l'approximation trigonométrique des fonctions dans l'intervalle infini. II. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 2, 149—160 (1931).

Ce Mémoire constitue la seconde partie du Mémoire analysé plus haut. L'auteur applique les résultats obtenus dans la première partie pour démontrer notamment le théorème suivant: Considérons les deux groupes de suites $\{\tau_s^{(m)}(\varepsilon), p_s^{(m)}(\varepsilon)\}$ et $\{\delta_s^{(m)}(\varepsilon), q_s^{(m)}(\varepsilon)\}$ vérifiant les conditions (1) (voir analyse précédente) où α , A et B dépendent de ε (> 0). Si à chaque ε correspond un m_ε tel que pour $m > m_\varepsilon$

$$\int_{t-1}^{t+1} \left| f(t) - \sum_{-m}^m \sum_{-m}^m p_s^{(m)}(\varepsilon) q_r^{(m)}(\varepsilon) f(t + \tau_s^{(m)} + \delta_r^{(m)}(\varepsilon)) \right|^2 dt < \varepsilon$$

et si

$$\frac{1}{2Q} \int_{-Q}^Q |f(t)|^2 dt < C,$$

alors à chaque $\eta > 0$ on peut faire correspondre une somme trigonométrique $P_\eta(t)$ telle que:

$$\int_{t-1}^{t+1} |f(t) - P_\eta(t)|^2 dt < \eta.$$

On généralise ensuite quelques théorèmes concernant l'approximation des fonctions presque périodiques dus à MM. Bohr et Wiener. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Walsh, J. L.: On polynomial interpolation to analytic functions with singularities. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 289—294 (1932).

Es sei $f(z)$ eine auf der Peripherie C des Einheitskreises definierte und stetige Funktion; $p_n(z)$ dasjenige — durch die Lagrangesche Interpolationsformel dargestellte — Polynom n -ten Grades, welches in den $n+1$ -ten Einheitswurzeln dieselben Werte annimmt, wie $f(z)$. Dann wird bewiesen, daß für $|z| < 1$

$$p_n(z) \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t) dt}{t-z} = f_1(z) \quad (\text{I})$$

gilt, und zwar gleichmäßig in jedem kleineren Kreis $|z| \leq r (< 1)$. Die Beweismethode ist im wesentlichen identisch mit der bei Fejér (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1918, 327—328), wobei der Satz jedoch nur für den Spezialfall ausgesprochen wurde, daß $f(z)$ für $|z| < 1$ analytisch, für $|z| \leq 1$ stetig [und daher $f_1(z) = f(z)$ für $|z| < 1$] ist. — Ferner zeigt Verf., daß die Gültigkeit von (I) gleichmäßig für $|z| \leq R (> 1)$ die Analytizität von $f(z)$ für $|z| < R$ nach sich zieht. Die sich auch aus andren Untersuchungen ergebende Tatsache (vgl. auch Fejér, a. a. O., S. 320, Fußnote), daß (I) für beliebige Interpolationsstellen auch dann nicht mehr gültig zu sein braucht, wenn dieselben bei hinreichend großem n eine beliebig feine Einteilung von C bewirken, wird durch ein besonders einfaches Beispiel gezeigt. — Weiterhin wird das Verhalten der Polynomfolge $p_n(z)$ mit dem der Folge $P_n(z)$ verglichen, wobei $P_n(z)$ dasjenige Polynom n -ten Grades bezeichnet, für welches $\int_C |f(z) - P_n(z)|^2 |dz|$ möglichst klein ausfällt.

Zum Schluß wird das interessante Problem der Übertragung von (I) auf allgemeinere Kurven C aufgeworfen. Kalmár (Szeged).

Fejér, Leopold: Über einige Identitäten der Interpolationstheorie und ihre Anwendung zur Bestimmung kleinster Maxima. Acta Litt. Sci. Szeged 5, 145—153 (1932).

Given n real or complex numbers x_1, x_2, \dots, x_n , put $w(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, $l_k(x) = w(x)/(x - x_k) w'(x_k)$, $v_k(x) = 1 - w''(x_k)/w'(x_k) \cdot (x - x_k)$, $h_k(x) = v_k(x) (l_k(x))^2$. Then $l_k(x_k) = 1$, $l_k(x_v) = 0$ for $v \neq k$, $h_k(x_k) = 1$, $h_k(x_v) = 0$ for $v \neq k$, $h_k(x_v) = 0$ for $k, v = 1, \dots, n$. The polynomials l_k, h_k are the only polynomials, of degree $\leq n-1$ and $\leq 2n-1$ respectively, satisfying these conditions. They are called the fundamental polynomials of Lagrange and Hermite respectively, associated with x_k . In his work on interpolation, the author used the identities $l_1(x) + \dots + l_n(x) \equiv 1$, $h_1(x) + \dots + h_n(x) \equiv 1$, to which he adds now the curious identity $v_1(x) + \dots + v_n(x) \equiv n^2$. Using these identities, he proves the following theorems. 1) Let a be a complex number different from x_1, \dots, x_n and put $M = \max(|l_1(a)|, \dots, |l_n(a)|)$. Then $M \geq 1/n$ and $M = 1/n$ happens if and only if x_1, \dots, x_n are the vertices of a regular polygon with center a . 2) Suppose x_1, \dots, x_n are real. Suppose for a certain real x we have $v_1(x) \geq 0, \dots, v_n(x) \geq 0$. Then for this x we have $|l_k(x)| \leq 1/n$ for at least one of the polynomials $l_1(x), \dots, l_n(x)$. The very elegant proofs are of the most elementary character. Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Wintner, Aurel: On a generalization of the Lagrange-Gauss modular algorithm. Amer. J. Math. 54, 346—352 (1932).

Der Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels wird in folgender Weise verallgemeinert: Ausgehend von zwei positiven Zahlen a, b werden zwei Zahlenfolgen a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) hergestellt nach der Vorschrift

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= a, & b_0 &= b, \\ a_{n+1} &= \left(\frac{a_n^2 + b_n^2}{2} \right)^{\frac{1}{\varrho}}, \\ b_{n+1} &= (a_n b_n)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

wobei ϱ irgendeine positive Zahl ist. Erstens wird gezeigt, daß die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

existieren und einen gemeinsamen Wert haben, der fortan mit $M_\varrho(a, b)$ bezeichnet wird. Dabei ist die Folge b_1, b_2, \dots monoton aufsteigend, die Folge a_1, a_2, \dots monoton absteigend. Zweitens beweist Verf., daß bei festem ϱ die Größe $M_\varrho(a, b)$ stetig von a und b abhängt. Drittens ist $M_\varrho(a, b)$ bei festen a, b eine monoton nicht abnehmende Funktion von ϱ , für die die beiden Grenzwerte

$$M_0(a, b) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} M_\varrho(a, b),$$

$$M_\infty(a, b) = \lim_{\varrho \rightarrow \infty} M_\varrho(a, b).$$

existieren. Viertens wird analog zur Gauss'schen Formel für das gewöhnliche arithmetisch-geometrische Mittel

$$\lim_{b \rightarrow 0} M_1(a, b) \log(4a/b) = a \frac{\pi}{2}$$

bewiesen, daß für jedes ϱ der Grenzwert

$$p_\varrho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{M_\varrho(1, \varepsilon) [\log(2^{2/\varrho} \varepsilon^{-1})]^\varrho\}$$

existiert, wo ε eine stetige positive Variable bedeutet.

Bessel-Hagen (Bonn).

● **Hobson, E. W.:** *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics.* Cambridge Univ. press. 1931. XI, 500 S. geb. 37/6.

Seit dem Erscheinen der zweiten Auflage von Heines grundlegendem „Handbuch der Kugelfunktionen“ (1878) sind auch auf diesem Gebiete bedeutende Fortschritte erzielt worden. Eine Neubearbeitung der mit den Kugelfunktionen zusammenhängenden Probleme und Resultate war daher dringend erwünscht und liegt nun von berufener Seite vor. In methodischer Hinsicht ist in der Darstellung ein einheitlicher Zug, eine persönliche Note unverkennbar; dabei war es unvermeidlich, daß manche Resultate nicht auf dem einfachsten Wege hergeleitet wurden. Doch ist durch zahlreiche Hinweise dem Leser das Heranziehen einschlägiger Literatur erleichtert. Es liegt wohl an der Fülle des Materials, daß trotz des erheblichen Umfanges des vorliegenden Werkes manch wichtige Probleme (Kettenbruchdarstellungen, Reihenentwicklungen in Komplexen, mechanische Quadratur) zu kurz gekommen sind. Die ersten vier Kapitel geben eine Theorie der gewöhnlichen Kugelfunktionen erster und zweiter Art; Ausgangspunkt ist die Laplacesche Differentialgleichung. Kapitel V bringt eine eingehende Behandlung der verallgemeinerten Kugelfunktionen, Kapitel VI asymptotische Abschätzungen. Sie werden im Kapitel VII für das Konvergenz- und Summabilitätsproblem der Legendreschen und Laplaceschen Reihe verwendet. Kapitel VIII behandelt Additionstheoreme, Kapitel IX die Verteilung der Nullstellen. Schließlich werden in Kapitel X und XI die Verallgemeinerungen für den Fall einer Rotationsfläche bzw. eines Ellipsoids untersucht. Dem Verf. gebührt Dank für seine sorgfältige, mühevollen Arbeit.

Otto Szász (Frankfurt a. Main.)

Kogbetliantz, E.: *Sur les développements de Laguerre.* C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1422–1424 (1932).

L'auteur démontre le théorème suivant: Soit $f(x)$ une fonction intégrable dans tout intervalle (ε, A) $\varepsilon > 0$. Soit d'autre part $\delta > 0$ assez grand pour que les deux expressions

$$\int_0^\varepsilon x^{\frac{\alpha+\delta}{2}-\frac{1}{4}} |f(x)| dx \quad \text{et} \quad \int_A^\infty e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}-\delta} |f(x)| dx$$

aient un sens. Dans ces conditions la série de Laguerre de $f(x)$

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^{(\alpha)}(x) \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha L_n^{(\alpha)}(u) f(u) du \quad (\text{L})$$

est sommable (C, δ) vers la somme $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ pour tout point intérieur x_0 ($x_0 > 0$). — Si $f(x)$ est à variation bornée dans tout intervalle fini sauf au voisinage de $x = \xi$ ($\xi > 0$) ce point étant tel que $|x - \xi|^\gamma f(x) = O(1)$ ($x \rightarrow \xi$, $\gamma < 1$) même si $f(x) = O(x^\beta e^{x/2})$ pour $x \rightarrow \infty$, $\beta < \gamma - 1$, la série (L) n'est sommable (C, δ) au point $x = 0$ avec la somme $f(+0)$ que pour $\delta > \gamma + \alpha - \frac{1}{2}$. *Mandelbrojt.*

Gronwall, T. H.: An inequality for the Bessel functions of the first kind with imaginary argument. (*Dep. of Physics, Columbia Univ., New York.*) *Ann. of Math.*, II. s. **33**, 275—278 (1932).

Verf. schätzt die (reellwertige) Funktion $y_\nu(z) = iz \frac{J'_\nu(iz)}{J_\nu(iz)}$ ab; hierbei ist $J_\nu(z)$ die Besselsche Funktion ν -ter Ordnung und $i = \sqrt{-1}$. Von der Differentialgleichung erster Ordnung ausgehend, der $y_\nu(z)$ genügt, findet er die folgenden, für beliebig große, positive Werte von z und ν gültigen Schranken:

$$z - \frac{1}{2} + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{2z} (1 - e^{-2z}) < y_\nu(z) < z - \frac{1}{2} + \frac{\nu^2 + \frac{3}{4}}{2z} (1 - e^{-2z})$$

für $\nu \geq \frac{3}{2}$, $z > 0$. Ähnliche Ungleichungen gelten für $\frac{1}{2} \leq \nu \leq \frac{3}{2}$, $z > 0$. Es ist ferner:

$$\nu < y_\nu(z) < \sqrt{\nu^2 + z^2} \quad \text{für } \nu > 0, z > 0$$

und

$$y_\mu(z) - y_\nu(z) > 0 \quad \text{für } z \geq 0, \mu > \nu \geq 0.$$

H. Jordan (Rom).

Reihen, Fourierreihen, Fastperiodische Funktionen :

Mammana, Gabriele: Un lemma fondamentale per la teoria della sommazione delle serie. *Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **1**, 3—6 (1931).

Begründung eines elementaren Satzes über Häufungsgrenzen bei Reihentransformationen mit einem Hilfssatze über Doppelfolgen. *R. Schmidt (Kiel).*

Paley, R. E. A. C.: A note on power series. *J. London Math. Soc.* **7**, 122—130 (1932).

The chief result of the paper is: given two arbitrary sequences $\{d_n\}$ and $\{\eta_n\}$, such that $\sum d_n^2 = \infty$, $\eta_n \rightarrow 0$ ($\eta_n > 0$), there exists a power series $\Phi(z) = \sum A_n z^n$ continuous for $|z| \leq 1$ and such that (*) $\sum_{n=0}^M |A_n d_n| \neq o \left\{ \eta_M \left(\sum_{n=0}^M d_n^2 \right)^{1/2} \right\}$. In particular the left-hand side of (*) may be unbounded. From this theorem, as the author shows, it is easy to deduce the following result, due to Gronwall: For every function $\varphi(u)$ ($u > 0$) tending to $+\infty$ with u , there exists a $\Phi(z)$, continuous for $|z| \leq 1$, with $\sum |A_n|^2 \varphi(1/|A_n|)$ divergent. It has been proved by Littlewood that, if $\sum A_n^2 < \infty$, then

$$\int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} |\Phi'(\rho e^{i\theta})| d\theta = o \left(\sqrt{\log \frac{1}{1-r}} \right).$$

The author shows that the result cannot be improved even for $\Phi(z)$ continuous.

A. Zygmund (Wilno).

Cesari, Lamberto: Sulle serie doppie. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **1**, 297—314 (1932).

On distingue plusieurs sortes de convergence d'une série double $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$. On dit [définition due à MM. O. Stolz et A. Pringsheim: *Math. Ann.* **24**, 157 (1889) et S.-B. Bayer. *Akad. Wiss.* **27**, 101 (1897)] que cette série converge par rectangles ou dans le sens ordinaire si la suite double $s_{\mu\nu} = \sum_{i=0}^{\mu} \sum_{j=0}^{\nu} a_{ij}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots$, tend vers une limite $\lim_{\mu, \nu \rightarrow \infty} s_{\mu\nu} = s$ appelée somme par rectangles ou somme ordinaire de la série $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$. — D'autre part, on dit [définition due à M. F. Leja: *Math. Ann.* **103**, 364—368 (1930) et *Ann. Soc. Polon. math.* **9**, 135—142 (1931)] que la série $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ con-

verge dans la direction (α, β) , où $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, si la suite simple $\sigma_\lambda(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha i + \beta j \leq \lambda} a_{ij}$ (c'est-à-dire somme de tous les termes a_{ij} pour lesquels $\alpha i + \beta j \leq \lambda$),

où λ parcourt tous les nombres réels positifs de la forme $\alpha i + \beta j$, tend vers une limite $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sigma_\lambda(\alpha, \beta) = \sigma(\alpha, \beta)$ appelée somme dans la direction (α, β) . — L'auteur exa-

mine les relations entre la convergence ordinaire et celle dans des différentes directions (α, β) . Il a remarqué que la sommation dans des directions rationnelles (c'est-à-dire telles où le rapport α/β est rationnel) jouit des propriétés différentes de celle dans des directions irrationnelles (où α/β est irrationnel) et démontre entre autres que: I. La somme $\sigma(\alpha, \beta)$ dans une direction irrationnelle ne peut exister que si la limite $\lim_{i+j \rightarrow \infty} a_{ij} = 0$ existe. — II. Les sommes s et $\sigma(\alpha, \beta)$ ne peuvent être

différentes que si la direction (α, β) est rationnelle. — III. Si 1° la somme s existe et si 2° $\lim_{i+j \rightarrow \infty} a_{ij} = 0$ la suite $\sigma_\lambda(\alpha, \beta)$, où λ parcourt en croissant tous les nombres

positifs de la forme $\alpha i + \beta j = \lambda$, i et j étant des nombres naturels, est toujours sommable par les moyennes de Cesàro vers la somme s . Il en résulte que, si 2° a lieu, les sommes s et $\sigma(\alpha, \beta)$ ne peuvent jamais être différentes. — Observons que la proposition III reste vraie si l'on remplace la condition 2° par la suivante: la suite double $s_{\mu\nu}$ est bornée [Ann. Soc. Polon. math. 9, 137 (1930)].

F. Leja (Warszawa).

Sidon, S.: Ein Satz über Fouriersche Reihen mit Lücken. Math. Z. 34, 481—484 (1932).

If a trigonometric series $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x)$, where the integers λ_n satisfy an inequality $\lambda_{n+1}/\lambda_n > q > 1$ ($n = 1, 2, \dots$), is the Fourier series of a function integrable in the sense of Lebesgue, then $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ converges. Zygmund.

Sidon, S.: Ein Satz über die Fourierschen Reihen stetiger Funktionen. Math. Z. 34, 485—486 (1932).

By means of a result of Littlewood [Proc. London Math. Soc. 25, 328—337 (1926)] the following two theorems are proved. 1° The only sequences $\{\gamma_n\}$ possessing the property of transforming the Fourier series $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ of an arbitrary continuous function into the absolutely convergent series $\sum \gamma_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, are the sequences with $\sum |\gamma_n|^2$ convergent. 2° If $\sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \varepsilon_n$ is a Fourier-Lebesgue series for every sequence $\{\varepsilon_n\}$, where $\varepsilon_n = \pm 1$, then $\sum (a_n^2 + b_n^2)$ converges. The result 2° is proved also by Littlewood [J. London Math. Soc. 5, 179—182 (1930)].

A. Zygmund (Wilno).

Sidon, S.: Ein Satz über trigonometrische Polynome und seine Anwendung in der Theorie der Fourier-Reihen. Math. Ann. 106, 536—539 (1932).

Es wird der folgende interessante Satz bewiesen: Sei $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ eine Folge natürlicher Zahlen, die der Bedingung genügen $\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} > q$, $k = 1, 2, 3, \dots$; $q > 1$

fest gegeben. — Ferner seien a_{λ_k} , b_{λ_k} gegeben, so daß $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{\lambda_k}^2 + b_{\lambda_k}^2)$ konvergiert; dann gibt es eine stetige Funktion mit der Fourierschen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$;

d. h. die noch freien Koeffizienten a_ν , b_ν ($\nu \neq \lambda_k$) lassen sich so bestimmen, daß die Fouriersche Reihe eine stetige Funktion darstellt. Im Nachtrag wird die Bedingung für die λ_ν erweitert.

Otto Szász (Frankfurt a. Main).

Basoco, Miguel A.: Fourier developments for certain pseudo-periodic functions in two variables. Amer. J. Math. 54, 242—252 (1932).

In der Arbeit werden verschiedene trigonometrische Reihen für die Funktionen

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \frac{\partial'_x}{\partial_\beta(x)} \cdot \Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y)$$

gegeben, wo

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma}(x, y) = \vartheta'_1 \frac{\vartheta_\alpha(x+y)}{\vartheta_\beta(x)\vartheta_\gamma(y)} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3 \\ \vartheta'_1 = \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \end{array} \right)$$

Funktionen der komplexen Variablen x und y bezeichnen, die bei Jacobi in seinen Untersuchungen über die Dynamik von rotierenden starren Körpern auftreten.

Myrberg (Helsinki).

Wintner, Aurel: On the asymptotic repartition of the values of real almost periodic functions. *Amer. J. Math.* **54**, 339—345 (1932).

Es sei $f(t)$ eine reelle stetige fastperiodische Funktion, $m < f(t) < M$, $\varrho_T(\xi) = \frac{1}{2T} \text{mes } [f \leq \xi]_T$ ($[f \leq \xi]_T$ bedeutet die Menge der Punkte des Intervalls $-T \leq t \leq T$, in welchen $f(t) \leq \xi$ ist); ϱ_T ist eine monoton wachsende Funktion von ξ . Dann existiert eine einzige wachsende (nirgends konstante), von rechts stetige Funktion $\varrho(\xi)$ derart, daß $\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^n d\varrho(\xi) = M\{f^n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $\varrho(\xi) = 0$ für $-\infty < \xi < m$, $\varrho(\xi) = 1$ für $M < \xi < +\infty$ ist, die also das Momentenproblem für $f(t)$ löst. Die Gleichung $\varrho(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \varrho_T(\xi)$ gilt in allen Stetigkeitspunkten von ϱ . Für diese früher vom Verf. bewiesenen Sätze [*Math. Z.* **30**, 290—319 (1929)] werden jetzt die von der Matrizen-theorie unabhängigen Beweise gegeben.

W. Stepanoff (Moskau).

Differentialgleichungen:

Levi, Beppo: Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomiale dell'equazione differenziale $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **1**, 255—261 (1932).

P. Burgatti hat über die Polynomlösungen dieser Differentialgleichung eine Aussage gemacht, aber nicht vollständig bewiesen, sein Aufsatz ist in denselben Annalen im selben Band S. 165—172 erschienen (vgl. dies. Zbl. **3**, 207; man vgl. überdies die Noten von Sansone, dies. Zbl. **4**, 109 u. nachsteh. Ref.). Die Behauptung von Burgatti wird hier (mit einer kleinen Ausnahme) bestätigt, indem bewiesen wird: Wenn der Koeffizient $a_1 \neq 0$ ist, so teilt die Folge

$+\infty, -a_1^2, -3a_1^2, -5a_1^2, \dots, -(2[n/2] - 1)a_1^2, -\infty$ ($[]$ bedeutet die größte ganze Zahl) die Zahlenlinie in $[n/2] + 1$ Stücke. Je nachdem die Größe $\delta = a_1b_0 - a_0b_1$ in dem ersten, zweiten, dritten, ..., letzten dieser Stücke liegt, hat die Polynomlösung $y(x)$ der Differentialgleichung $0, 2, 4, \dots, 2[n/2]$ komplexe Wurzeln. Diese Aussage gilt jedoch nicht, wenn δ einen der Ausnahmewerte $-\nu a_1^2$ ($0 \leq \nu \leq n-1$) hat; vielmehr fallen dann $\nu + 1$ der Wurzeln in den Wert $-a_0/a_1$ zusammen, und die übrigen Wurzeln sind dann alle reell und erteilen dem Produkt $(a_1x + a_0)b$ negative Werte. Hat δ keinen dieser Ausnahmewerte, so erteilen die reellen Wurzeln dem Produkt $(a_1x + a_0)b$ entweder alle oder alle bis auf eine einzige negative Werte; die zweite Aussage trifft dann zu, wenn δ einem der Stücke

$$(0, -a_1^2), (-2a_1^2, -3a_1^2), (-4a_1^2, -5a_1^2), \dots$$

angehört. Wenn der Koeffizient $a_1 = 0$ ist, so hat $y(x)$ stets eine Wurzel $-b_0/b_1$, wenn n ungerade ist; alle anderen Wurzeln sind komplex mit dem reellen Teil $-b_0/b_1$, wenn $\delta = -a_0b_1 < 0$ ist, dagegen reell und symmetrisch zu $-b_0/b_1$, wenn $\delta = -a_0b_1 > 0$ ist. Ist schließlich $\delta = 0$ (daher auch, wenn $a_0 = 0$ ist), so fallen alle Wurzeln in $-b_0/b_1$ zusammen.

L. Schrutka (Wien).

Sansone, G.: Ancora sugli zeri delle soluzioni polinomiali dell'equazione $(a_1x + a_0)y'' + (b_1x + b_0)y' - nb_1y = 0$. *Nota II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **15**, 194—197 (1932).

Unmittelbare Fortsetzung von I im selben Bd., 125—130 (vgl. dies. Zbl. **4**, 109 und auch vorst. Ref.). Es wird gezeigt: Wenn $c_1 = -sc_0^2$ und $n > s + 1$ ist, so sind alle Nullstellen von $y_n(t)$ reell; $s + 1$ davon gleich c_0/c_1 , alle anderen kleiner. Wenn

— $c_0 < c_1$ und $c_1 \neq 0$ ist, so hat $y_n(t)$ n reelle Nullstellen, die für $c_1 > 0$ alle kleiner als c_1/c_0 sind, während für $-c_0^2 < c_1 < 0$ $n-1$ kleiner als c_1/c_0 sind, die letzte dagegen größer. Wenn endlich $-(2r+1)c_0^2 < c_1 < -(2r-1)c_0^2$ und $c_1 \neq -2rc_0^2$ ($r=1, 2, \dots$) ist, so haben die Polynome $y_1, y_3, \dots, y_{2r-1}$ eine einzige reelle Nullstelle, die größer als c_1/c_0 ist, die Polynome y_2, y_4, \dots, y_{2r} lauter komplexe Nullstellen: die Polynome y_n mit $n > 2r$ haben nur $n-2r$ reelle Nullstellen, diese sind für $-2rc_0^2 < c_1 < -(2r+1)c_0^2$ sämtlich kleiner als c_1/c_0 , für $-(2r+1)c_0^2 < c_1 < 2rc_0^2$ dagegen sind $n-2r-1$ kleiner als c_1/c_0 , die letzte dagegen größer.

L. Schrutka (Wien).

Freudenthal, H.: Zur „Galoisschen“ Theorie der linearen Differentialgleichungen.

I. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1124–1125 (1931).

Programm einer neuen, von der Picard-Vessiot'schen verschiedenen Auflösungstheorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen, deren wesentlichste Merkmale sind: modern-algebraische Axiomatisierung, strenge Beschränkung auf das Lineare und Ausführbarkeit aller Prozesse in endlichvielen Schritten. Die betrachteten Funktionen bilden eine additive Abelsche Gruppe g mit Operatorbereich Ω (Differentialoperatoren). Eine Differentialgleichung $F\varphi = s$ auflösen heißt: zu einem gegebenen Operator F aus Ω und einer Funktion s aus g Elemente x_0, \dots, x_n in einer Erweiterung von g zu finden, so daß $x_0 + \sum \alpha_v x_v$ bei Spezialisierung der α_v alle Lösungen φ der Differentialgleichung ergibt. Eine Differentialgleichung heißt (anders als bei Picard-Vessiot) reduzibel, wenn sie sich nach Adjunktion unbestimmter Konstanten zu Ω durch eine Gleichung niedrigerer Ordnung ersetzen läßt, deren Lösungsbereich bei Spezialisierung der Konstanten mit dem der gegebenen Gleichung zusammenfällt. Die Operatorautomorphismen einer „Galoisschen“ Erweiterung von g in bezug auf das ursprüngliche g bilden, wenn man von jedem Automorphismus den identischen subtrahiert, einen Ring: den Galoisschen Ring, der in Analogie zur gewöhnlichen Galoisschen Theorie durch eine Kompositionsreihe von Idealen schrittweise abgebaut wird. — Wie man die nichtlinearen Beziehungen in dieser Theorie mit berücksichtigen kann, soll in einer weiteren Mitteilung dargetan werden.

van der Waerden (Leipzig).

Hammerstein, A.: Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung. S.-B. Berlin. math. Ges. 30, 3–10 (1932).

Die erste Randwertaufgabe für die nicht lineare Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ hat, wie bekannt, nicht immer eine Lösung. Verf. beweist nun die Existenz einer Lösung unter gewissen einschränkenden Bedingungen, deren wesentlichste $|f| \leq c|y|$ lautet, wobei c eine von der Länge des zugrunde gelegten Intervalls abhängige Konstante ist. Der Beweis wird durch einen Fourieransatz für y' geführt. Bricht man beim n -ten Gliede ab, so ergibt sich für die Fourierkonstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ein endliches, nicht lineares Gleichungssystem, für welches die Existenz eines Lösungssystems aus dem Brouwerschen Verschiebungssatz gefolgert wird. Sodann wird der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ vollzogen und bewiesen, daß man durch Integration der so erhaltenen Fourierreihe eine Lösung des Problems findet. — Aus dem erhaltenen Resultat folgert Verf. die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe noch für einige weitere Gleichungstypen. Zum Schluß wird die Frage der Eindeutigkeit behandelt. Diese wird im wesentlichen unter der Voraussetzung $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq \alpha, \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \leq \beta$ bewiesen, wobei die Konstanten α, β der Ungleichung $\alpha + \beta < 1$ genügen. Durch Anwendung des Satzes auf ein lineares Problem wird gezeigt, daß sich die Schranke für $\alpha + \beta$ nicht verbessern läßt.

E. Rothe (Breslau).

● **Bateman, H.:** Partial differential equations of mathematical physics. Cambridge: Univ. Press 1932. XXII, 522 S. geb. 42/-.

Das Buch behandelt die Lösung der klassischen partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik — insbesondere der linearen —; dabei ist das Hauptziel eine Darstellung aller jener Methoden vor allem bei Randwertaufgaben, welche zu

explizit bekannten, d. h. mit bekannten einfachen Funktionen ausdrückbaren Lösungen führen. Darüber hinaus werden auch Approximationsmethoden berührt. Allgemeine mehr begriffliche Theorien treten mehr in den Hintergrund. — Es gibt wohl kein anderes Werk über mathematische Physik, welches den analytischen Apparat und die bisher damit erzielten expliziten Ergebnisse mit einer solchen Vollständigkeit und mit soviel originellen Beiträgen darstellt. — Der Verf. ist ja selbst seit mehreren Jahrzehnten ein führender Forscher auf diesem Gebiete. — Von besonderer Bedeutung ist es, daß stets die mathematischen Probleme in Beziehung zu physikalischen Fragen behandelt werden. Das Werk ist mit sehr ausführlichen Literaturangaben versehen und wird, wenn es auch für eine durchlaufende Lektüre vielleicht nicht sehr geeignet ist, dem fortgeschrittenen Lernenden und dem Forscher ausgezeichnete Dienste leisten.

Courant (Göttingen).

Kourensky, M.: Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du 2nd ordre avec 2 fonctions de 2 variables indépendantes. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 348—353 (1932).

In Anlehnung an Darboux wird zur Integration eines Systems von zwei partiellen Differentialgleichungen mit zwei gesuchten Funktionen und zwei unabhängigen Veränderlichen eine dritte ebensolche mit dem gegebenen System verträgliche Differentialgleichung $\Phi = 0$ aufgesucht. Der Ausdruck Φ ergibt sich als Lösung eines Systems von vier linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Rellich (Hamburg).

Cibrario, Maria: Su alcuni notevoli cambiamenti di variabili e sulle loro applicazioni ad alcune equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico e parabolico. Atti Accad. Sci. Torino 67, 85—105 (1932).

Bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus werden Koordinatentransformationen vorgenommen und daraus einige einfache Sätze gefolgert.

Rellich (Hamburg).

Integralgleichungen und Theorie der unendlich vielen Veränderlichen:

Leray, J.: Sur certaines classes d'équations intégrales non linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1627—1629 (1932).

Zwei einfache Typen von nichtlinearen Integralgleichungen, von denen „im allgemeinen“ der erste eine ungerade Anzahl reeller Lösungen besitzt, der zweite eine gerade. Die Bedeutung der Einschränkung „im allgemeinen“ wird nicht genau formuliert. Des weiteren werden einige Schwierigkeiten angedeutet, die bei Anwendung der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen von E. Schmidt auf gewisse hydrodynamische Probleme auftreten.

Rudolf Iglisch (Aachen).

Pankraz, Otomar: Sur une transformation de la théorie des équations intégrales. Čas. mat. fys. 61, 231—235 (1932) [Tschechisch].

En s'appuyant sur quelques notions de la théorie de fonctions permutables de Volterra l'auteur démontre: Soit dans

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x) \cdot \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (1)$$

$f(x) = \text{constante}$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit réductible par la substitution

$$\varphi(x) = e^{\int_a^x f(z) dz} \cdot u(x)$$

à l'équation

$$u(x) = A + \int_a^x H(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

est que le noyau $K(x, \xi)$ soit une fonction $K \equiv K(x - \xi)$.

Autoreferat.

Winn, C. E.: Sur la convergence d'une suite dérivée d'une autre suite à variation bornée. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 1425—1427 (1932).

In Analogie zu einem bekannten Satz von Toeplitz und Silverman werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen bestimmt, denen eine Matrix $(a_{\nu\mu})$ zu genügen hat, damit für jede Folge (s_n) von beschränkter Variation [für die also $\sum (s_\nu - s_{\nu-1})$ absolut konvergiert] $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=0}^n a_{n\nu} s_\nu$ existiert und gleich $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ ist.

Otto Szász (Frankfurt a. M.).

Delsarte, J.: Sur une équation matricielle. C. R. Acad. Sci., Paris **194**, 514—516 (1932).

Es wird die Gleichung $K = H - \lambda AH - \mu HB$ behandelt, wo H ein gesuchter, K, A, B gegebene beschränkte Linearoperatoren im Hilbertschen Raum sind. Sind α und β die Eigenwerte von $E - \lambda A$ und $E - \mu B$, so sind — wie gezeigt wird — die Eigenwerte der obigen Gleichung durch $1 = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\mu}{\beta}$ bestimmt. Für solche λ und μ — wird behauptet — besitzt die homogene Gleichung ($K = 0$) Lösungen. — Ein Sonderfall (u. a.) entsteht aus der Gleichung $dH/dt = AH - HA$ nach dem Ansatz $H = e^{t/\lambda}$; sie besitzt also Lösungen, wenn $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha'}$ gilt, wo α und α' zwei Eigenwerte von A sind.

Friedrichs (Braunschweig).

Neumann, J. v.: Über adjungierte Funktionaloperatoren. Ann. of Math., II. s. **33**, 294—310 (1932).

Ein Operator A des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} ist ein $*$ -Operator, wenn die von seinem Definitionsbereich aufgespannte, abgeschlossene Linearmannigfaltigkeit \mathfrak{H} ist, d. h. wenn kein $f \neq 0$ zu seinem Definitionsbereich orthogonal ist. Wenn A ein $*$ -Operator und f^* eine feste Funktion ist, so gibt es höchstens eine Funktion f , welche für jede Funktion g aus dem Definitionsbereich von A der Bedingung

$$(f, Ag) = (f^*, g) \quad (*)$$

genügt. Man kann folglich

$$f = A^* f^*$$

setzen; der Operator A^* ist die Adjungierte von A . Dieser Operator A^* ist immer linear und abgeschlossen. Wenn A^* auch ein $*$ -Operator ist, so kann man den Operator A^{**} bilden; A^{**} ist offensichtlich die Fortsetzung von A . Umgekehrt, wenn ein $*$ -Operator A zu linear abgeschlossenen Operatoren B fortgesetzt werden kann, so gibt es unter allen diesen B einen kleinsten, er heiße \tilde{A} , und es gilt immer $\tilde{A} = A^{**}$. Man betrachtet weiter nur die linear abgeschlossenen $*$ -Operatoren A ; dann ist $A^{**} = A$. Die Operatoren A^*A und AA^* sind immer hermitesch, definit und hypermaximal. Es gibt einen und nur einen hermiteschen, definiten, hypermaximalen Operator B bzw. C , mit $B^2 = A^*A$ bzw. $C^2 = AA^*$. Es zeigt sich, daß B denselben Definitionsbereich hat wie A und stets $\|Bf\| = \|Af\|$ ist. B ist dabei der einzige hermitesche, definite, hypermaximale Operator, welcher mit A metrisch gleich ist. Es gibt endlich einen im wesentlichen längentreuen Operator W , derart, daß $A = WB = CW$, $A^* = BW^* = W^*C$, $C = WBW^*$, $B = W^*CW$ ist. Für die Normalität von A ist $B = C$ charakteristisch. — Die Beweismethode beruht auf der Betrachtung des Raumes H aller Paare $\{f, g\}$ von Funktionen aus H , in welchem die Operatoren A durch die Bildmengen $\{f, Af\}$ dargestellt werden können.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Variationsrechnung:

Schuler, Ludwig: Über die notwendigen Bedingungen beim zweidimensionalen Variationsproblem einfachster Art. Acta Litt. Sci. Szeged **5**, 154—167 (1932).

The paper is concerned with variation problems of the form $\int \int f(x, y, z, p, q) dx dy = \min$. A function $z(x, y)$ is admissible if it satisfies the boundary conditions, and has continuous partial derivatives of the first order. Haar developed the consequences of the vanishing

of the first variation for minimizing functions which are only supposed to have continuous partial derivatives of the first order. The author investigates what happens in this case to the classical necessary conditions based upon the second variation. — Besides, the following problem is considered. To the partial differential equations of the first order, derived by Haar for minimizing functions with continuous first derivatives, Radó added two further systems of equations, which have been shown, by Haar and Schauder, to be consequences of the equations of Haar in certain particular cases. The author asserts this interdependence for the general case. The reviewer would welcome a more detailed proof of this interesting result. *T. Radó.*

Myers, S. B.: Adjoint systems in the problem of Mayer under general end-conditions. Bull. Amer. Math. Soc. 38, 303—312 (1932).

Les variations qu'on considère dans le problème de Mayer et les multiplicateurs qu'on est amené à y introduire satisfont à deux systèmes d'équations différentielles, adjoints l'un à l'autre. L'auteur considère le cas des extrémités variables, définit les conditions de transversalité et examine la compatibilité des équations différentielles des multiplicateurs. *A. Szűcs (Budapest).*

Tonelli, L.: Un teorema di calcolo delle variazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 417—423 (1932).

Von den bekannten Sätzen über die Existenz eines absoluten Minimums beim Problem $J = \int_a^b f(x, y, y') dx = \text{Min.}$ werden Fälle wie $J = \int_0^1 xy'^2 dx$ oder $J = \int_0^1 \sqrt{x} y'^2 dx$ nicht erfaßt; es stört das Verschwinden von x bzw. \sqrt{x} an der Stelle $x = 0$. — In dieser Richtung beweist der Autor folgenden Satz: Man nehme zu den üblichen Voraussetzungen (Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften für f , $f_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$, Beschränkung der x, y auf einen abgeschlossenen beschränkten Bereich A , Totalstetigkeit der $y(x)$ mit endlichem Integral J) noch die weitere Voraussetzung hinzu:

$$f(x, y, y') \geq |x - x_1|^{\alpha_1} |x - x_2|^{\alpha_2} \dots |x - x_r|^{\alpha_r} |y'|^{1+\alpha},$$

wobei x_1, x_2, \dots, x_r untereinander verschiedene Konstante sind, $\alpha \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_r \geq 0$ gilt und α größer ist als alle Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Dann existiert in jeder abgeschlossenen Klasse von Kurven $y(x)$ aus A ein absolutes Minimum von J . — Die Notwendigkeit der Bedingung $\alpha > \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) wird am Problem $\int_0^1 xy'^2 dx = \text{Min.}$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ gezeigt, das keine Lösung besitzt. *Rellich.*

La Paz, Lincoln: Variation problems of which the extremals are minimal surfaces. Acta Litt. Sci. Szeged 5, 199—207 (1932).

Kürschák, Josef: Eine Ergänzung zur Abhandlung von Herrn L. La Paz über Variationsprobleme, für welche die Extremalflächen Minimalflächen sind. Acta Litt. Sci. Szeged 5, 246 (1932).

The author of the first paper considers the problem of determining the most general variation problem of the form $\int \int f(x, y, z, p, q) dx dy = \text{min.}$, all the extremals of which are minimal surfaces. The problem requires to determine a multiplier $M = M(x, \dots, q)$ in such a manner that the equation $MF = 0$, where $F = (1 + q^2)r - 2pqz + (1 + p^2)t$, be self-adjoint. The author proves that the most general multiplier is of the form $c(1 + p^2 + q^2)^{-3/2}$, where c is an arbitrary constant. Hence, the most general integrand function $f(x, y, z, p, q)$ is of the form $c[(1 + p^2 + q^2)^{1/2} + \partial w_1 / \partial x + \partial w_2 / \partial y]$, where w_1, w_2 are arbitrary functions of x, y, z alone. While in this case the multiplier M is unique except for a constant factor, the partial differential equation $r = 0$ admits of the multiplier $A(y, p, z - px)$, where A is an arbitrary function of its arguments. Finally, the author asks for the most general variation problem with an integrand

$h(x, y, z, p, q, r, s, t)$, such that the Euler-Lagrange equation is of the second order and equivalent to $(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$. The problem is made to depend upon a complicated system of differential equations. In the second of the two papers under review, Kürschák points out that the solution of the problem follows immediately from one of his results concerning variation problems with identically vanishing Euler-Lagrange equation. It follows in this manner that, except for a constant factor, the most general integrand, satisfying the problem, has the form

$(1 + p^2 + q^2)^{1/2} + f$ where $f = \sum_{k=1}^2 (d\varphi_k/dx \cdot d\psi_k/dy - d\varphi_k/dy \cdot d\psi_k/dx)$. Here $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ are arbitrary functions of x, y, z, p, q and $d/dx = \partial/\partial x + p\partial/\partial z + r\partial/\partial p + s\partial/\partial q$, $d/dy = \partial/\partial y + q\partial/\partial z + s\partial/\partial p + t\partial/\partial q$. Tibor Radó (Columbus, Ohio).

Funktionentheorie:

Fekete, Michel: Sur quelques généralisations de l'inégalité de Jensen. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1625—1627 (1932).

Es sei D ein einfach zusammenhängender Bereich, dessen Rand eine stetige geschlossene Kurve l ist. Die Funktion $\varphi(z)$ sei in D regulär, und $|\varphi(z)| = 1$ auf l . Dann gilt für jede in D reguläre Funktion $f(z)$, deren Nullstellen z_1, \dots, z_m mit keiner der Nullstellen ζ_1, \dots, ζ_n von $\varphi(z)$ in D zusammenfallen,

$$\left| \frac{f(\zeta_1) \dots f(\zeta_n)}{\varphi(z_1) \dots \varphi(z_m)} \right| \leq \text{Max} |f(z)|^n. \quad R. Schmidt (Kiel).$$

Denjoy, Arnaud: Sur la continuité des fonctions analytiques singulières. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1428—1430 (1932).

Soit C une ligne simple de Jordan, située dans une région R . On sait par les travaux de Painlevé que, si C est rectifiable, une fonction $F(z)$ continue en tout point de R et holomorphe en tout point de R non situé sur C , est holomorphe même sur C . L'aut., suivant une suggestion de M. Lusin, indique que cette propriété peut être généralisée dans une certaine mesure. Mais l'aut. donne aussi des exemples de courbes C pour lesquelles la conclusion serait fausse: un 1^{er} exemple est fourni par les courbes C d'Osgood, dont chaque arc possède une aire positive; un autre exemple se rapporte à une courbe dont chaque arc a une aire nulle et une longueur infinie; d'autres exemples sont fournis par des courbes du type $\zeta = \xi + i\psi(\xi)$. L'aut. donne aussi des exemples relatifs à d'autres sortes de singularités. Georges Giraud.

Ahlfors, Lars: Über die asymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboens. 6, 1—8 (1932).

Eine ganze Funktion der Ordnung k hat höchstens $2k$ endliche asymptotische Werte. Dagegen kann eine meromorphe Funktion von endlicher Ordnung beliebig viele asymptotische Werte besitzen. Beschränkt man sich aber auf die asymptotischen Werte, welche direkt kritische Singularitäten der Umkehrfunktion darstellen, so bleibt der Satz richtig: Wenn die Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion n direkt kritische Singularitäten besitzt, so ist die Ordnung der Funktion wenigstens gleich $n/2$. Aus diesem Wortlaut läßt sich dann wieder der ursprüngliche Denjoysche Satz herleiten. — Auf S. 4 wird versehentlich behauptet, daß in den von den inneren Randkurven von Δ_a begrenzten Gebieten $|f(z) - a| < \delta$ sei. Um den Beweis richtigzustellen, muß das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip direkt auf das (evtl. mehrfach zusammenhängende) Bildgebiet von Δ_∞ angewandt werden. Ahlfors.

Bernstein, Vladimir: Sur l'analogie entre la distribution des droites de Julia des fonctions holomorphes et celle des points singuliers des fonctions analytiques. C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1629—1631 (1932).

En revenant à l'hypothèse qu'il a émise dans une Note précédente (voir Zbl. 3, 262) et concernant l'analogie entre les droites J d'une fonction entière et les singularités de la série de Taylor qui lui est associée d'une certaine manière, l'auteur signale d'abord que M^{lle} Cartright lui a fait savoir que cette hypothèse n'est certainement pas vérifiée

dans le cas général. L'auteur donne ensuite les grandes lignes de la démonstration de son théorème (voir l'analyse citée) concernant la classe de fonctions entières pour lesquelles son hypothèse est justifiée. *Mandelbrojt* (Clermont-Ferrand).

Milne-Thomson, L. M.: The zeta function of Jacobi. A seven-decimal table of $Z(u|m)$ at interval 0.01 for u and for values of $m(=k^2)$ from 0.1 to 1.0. Proc. Roy. Soc. Edinburgh 52, 236—250 (1932).

Es handelt sich um die von Jacobi in § 47 der Fundamenta eingeführte Funktion, die mit dem elliptischen Normalintegral zweiter Gattung

$$E_1(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2(\sin \psi)^2} d\psi,$$

das durch die Substitution $\varphi = am u$ in die Gestalt

$$E(u) = \int_0^u dn^2 z dz$$

übergeht, in der folgenden Beziehung steht:

$$Z(u|m) = E(u) - \frac{E}{K} u,$$

wo $m = k^2$ gesetzt ist und E und K die vollständigen Integrale bezeichnen. Die Tafel wurde durch angenäherte Berechnung des Integrals $\int_0^u dn^2 z dz$ gewonnen. *Bessel-Hagen* (Bonn).

Dalzell, D. P.: Theory of the Theta-Fuchsian functions. Proc. London Math. Soc., II. s. 33, 539—558 (1932).

In der Arbeit wird eine neue Methode zur Darstellung der automorphen Funktionen einer von hyperbolischen Substitutionen erzeugten Fuchsschen Gruppe durch die Poincaréschen θ -Funktionen gegeben, wodurch es u. a. möglich wird, den Begriff des Geschlechtes einer Fuchsschen Gruppe ohne Anwendung der Topologie und der Theorie der algebraischen Funktionen einzuführen. Als wesentlich neues Hilfsmittel wird eine neue Klasse analytischer Funktionen angewandt, die „Eta-Fuchsschen Funktionen“, zu denen man gelangt, wenn man von einem geeignet gewählten unendlichen System von polfreien Poincaréschen θ -Funktionen ausgeht, deren Dimension unbegrenzt wächst, und auf die von denselben gebildete Funktionenfamilie die Sätze der Montelschen Theorie anwendet. Die fragliche Eta-Funktion $H(z, a)$ ist dabei eine innerhalb des Hauptkreises reguläre analytische Funktion, die nur im Punkt $z = a$ und in den damit äquivalenten Punkten einfach verschwindet und bei Ausführung der Substitutionen $T_\nu(z)$ der Gruppe die Transformation

$$|H(T_\nu z, a) (T'_\nu z)^{1/P}| = |H(z, a)|$$

erleidet, wo P , die „Klasse der Gruppe“, mit dem Geschlecht p durch die Relation $P = 2p - 2$ verbunden ist. Zur Bildung der automorphen Funktionen geht der Verf. von den verallgemeinerten Poincaréschen Reihen

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{T'_\nu z}{H(T_\nu z, a) (a - T_\nu z)}$$

aus, woraus durch Integration direkt ein Elementarintegral zweiter Gattung mit dem einfachen Pol a erhalten wird. Analoge Ausdrücke gelten für die Integrale erster und dritter Gattung. Zum Abschluß wird der folgende Satz bewiesen: Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ zwei innerhalb des Einheitskreises meromorphe Funktionen, zwischen denen eine algebraische Gleichung des Geschlechtes $p > 1$ herrscht, die in bezug auf f_1 und f_2 resp. vom Grade n_1 und n_2 ist, so kann $f_1(z)$ und $f_2(z)$ als Quotient zweier innerhalb des genannten Kreises regulärer analytischer Funktionen dargestellt werden, deren absoluten Werte resp. unterhalb der Grenzen $(1 - |z|)^{-n_1/(2p-2)}$ und $(1 - |z|)^{-n_2/(2p-2)}$ liegen. *Myrberg* (Helsinki).

Schlesinger, Ludwig: Zur Theorie der Zetareihen von Poincaré. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 1, 251—254 (1932).

Um Einsicht in die noch ungeklärten Konvergenzverhältnisse der Poincaréschen Z-Reihen zu gewinnen und gegebenenfalls der Divergenz abhelfen zu können, gibt der Verf. für die Funktion $y = x^s$ mit beliebigem komplexen s die innerhalb eines Kreistrings $r < |\omega| < R$ gültige Darstellung:

$$y = x^s = (x - 1) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{R} \right)^n \frac{R\eta/2\pi i}{\eta - 2n\pi i} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\omega} \right)^n \frac{r\eta/2\pi i}{\eta + 2n\pi i} - \frac{1}{2\pi i} \int_r^R \frac{\varrho^{\eta/2\pi i}}{\varrho - \omega} d\varrho \right\}$$

($\eta = \lg x$, $\omega = e^{2\pi i s}$). Auch diese Entwicklung besitzt die grundlegende Eigenschaft der für $|\omega| = 1$ sich ergebenden Z-Reihe

$$y = x^s = (x - 1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \omega^{-n} \frac{1}{\eta + 2n\pi i},$$

daß bei Anwendung einer Substitution der Fuchsschen Gruppe (die hier aus den parabolischen Substitutionen $\eta + 2n\pi i$ besteht) auf ihr Argument die Z-Reihe die „zugeordnete Substitution“ (hier: $\omega^n y$) erfährt. Aus diesem Beispiel folgert der Verf. für die allgemeine Z-Reihe: Liegen die Wurzeln der Substitutionen, die parabolischen Fundamentalsubstitutionen der Fuchsschen Gruppe zugeordnet sind, nicht alle auf dem Einheitskreis, so treten zu der dann nicht mehr absolut konvergierenden Z-Reihe Zusatzintegrale von der Art der in dem spez. Beispiel sich ergebenden Integrale. v. Koppensfels.

Cartan, Henri: Sur les transformations analytiques des domaines cerclés et semi-cerclés bornés. Math. Ann. 106, 540—573 (1932).

Ein Bereich heißt ein Kreiskörper bzw. ein Hartogsscher Körper (semi-cerclé), falls er bei sämtlichen Transformationen $w' = we^{i\vartheta}$, $z' = ze^{i\vartheta}$ (bzw. $w' = w$, $z' = ze^{i\vartheta}$) in sich übergeht und seinen Mittelpunkt 0,0 (bzw. mindestens einen Punkt der „Symmetrieebene“ $z = 0$) als inneren Punkt enthält. Zwei Kreiskörper (bzw. Hartogssche Körper) heißen äquivalent, falls sie sich durch eine ganze lineare Transformation [bzw. eine Transformation $w' = f(w)$, $z' = zg(w)$] aufeinander abbilden lassen. Über die (eindeutigen und analytischen) Abbildungen der Kreiskörper beweist Cartan den fundamentalen Satz: Ist ein beschränkter Kreiskörper weder einem Reinhardtschen Körper noch einem Körper Δ_a

$$(\Delta_a) |w| < 1, |z| < 1, \left| \frac{z - w}{1 - \bar{z}w} \right| < a$$

äquivalent, so sind sämtliche Abbildungen des Körpers auf sich (und auch die Abbildungen je zweier solcher Bereiche aufeinander) mittelpunkstreu, folglich ganz linear; zwei Kreiskörper sind (ausnahmslos) nur dann aufeinander abbildbar, falls sie äquivalent sind. Die obengenannten Ausnahmekörper Δ_a sind sämtlich Regularitätsbereiche und gestatten die Transformationen (und für $a \neq 1$ nur diese) $w' = e^{i\vartheta} \frac{w + t}{1 + \bar{t}w}$, $z' = e^{i\vartheta} \frac{z + t}{t + \bar{t}z}$ ($|t| < 1$, ϑ reell),

kombiniert mit der Transformation $w' = z$, $z' = w$. — Über die Abbildungen der Hartogsschen Körper gelten analoge Sätze: Sämtliche Abbildungen eines Hartogsschen Körpers \mathfrak{B} auf sich (bzw. je zweier Hartogsscher Körper \mathfrak{B} und \mathfrak{B}_1 aufeinander) haben die Form $w' = f(w)$, $z' = zg(w)$ mit Ausnahme der folgenden Fälle: 1. \mathfrak{B} (bzw. \mathfrak{B}_1) ist einem allgemeinen Dizylinder oder 2. einem Körper

(*) $1 < \frac{1 - |z|^2}{|w|^\alpha} < M$ ($\alpha > 0$) oder 3. einem Körper (*) $1 < (1 - |z|^2) e^{\frac{w - \bar{w}}{t}} < M$

äquivalent — es wird dabei stets vorausgesetzt, daß weder der gegebene Körper noch die zugehörige Regularitätshülle (le plus petit dom. max. contenant \mathfrak{B}) einem Reinhardtschen Körper äquivalent ist. Die Untersuchung der Ausnahmekörper ergibt: 1. Ein allgemeiner Dizylinder (ein solcher besteht aus der Menge aller Punkte w, z ,

für die w im Innern eines Bereiches der w -Ebene, z im Innern von $|z| < 1$ liegt) läßt nur Transformationen der Form $w' = f(w)$, $z' = e^{i\vartheta} \frac{z+t}{1+\bar{t}z}$ in sich zu, 2. ein Bereich (*)

die Transformationen $w' = e^{i\vartheta_1} w \left[\frac{1-t\bar{t}}{(1+\bar{t}z)^2} \right]^{1/\alpha}$, $z' = e^{i\vartheta_2} \frac{z+t}{1+\bar{t}z}$; bemerkt sei, daß ein

Bereich (*) (M endlich) kein Regularitätsbereich ist, die zugehörige Regularitätshülle ist der Bereich $|w|^\alpha + |z|^2 < 1$, $w \neq 0$ [die Bereiche $|w|^\alpha + |z|^2 < 1$ und ihre Bilder sind neben Hyperkugel und Dizylinder die einzigen Reinhardtschen Körper, die nicht-mittelpunktstreue Transformationen — nämlich die eben genannten Transformationen der Bereiche (*) — in sich zulassen; vgl. Thullen, *Annalen* **104**, 244—259 und dies.

Zbl. **1**, 23. 3. Ein Bereich (*) ist durch die Transformation $w = e^{-\frac{2i\vartheta'}{\alpha}}$, $z = z'$ auf einen Überlagerungsbereich (unendlich hoher „Ordnung“) eines Bereiches (*) abbildbar. Erwähnt sei noch, daß sich ein beschränkter Hartogsscher Körper \mathfrak{B}_1 nur dann auf einen Kreiskörper \mathfrak{B}_2 abbilden läßt, falls sowohl \mathfrak{B}_1 wie auch \mathfrak{B}_2 einem Reinhardtschen Körper äquivalent ist. Es ist somit durch die Ergebnisse von C. die Frage nach den Abbildungen der Kreiskörper und Hartogsschen Körper vollständig gelöst. [Einen Teil der Resultate seiner Arbeit hatte C. bereits früher in zwei Noten bekannt gegeben; vgl. C. R. Acad. Sci., Paris **192**, 709—712 u. 869—871 (1931); vgl. ferner die betr. Referate in diesem Zbl. **1**, 148 u. 286, dort siehe auch die nicht wiederholten Resultate, insbesondere die interessanten Aussagen über die Abbildungsgruppe eines Hartogsschen Körpers.] Thullen (Münster i. W.).

Severi, Francesco: Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse. Rend. Semin. mat. fis. Milano **5**, 1—58 (1931).

Diese Arbeit gibt eine aus Vorlesungen entstandene Übersicht über die Probleme und Resultate der Funktionentheorie zweier Variablen. — Die zahlreichen vom Verf. stammenden Resultate, die in der Lösung des Randwertproblems für die biharmonischen Funktionen gipfeln, sind zum größten Teil bereits in anderen Arbeiten enthalten und im Zbl. **1**, 148; **2**, 38, 342; **3**, 213, 214 besprochen worden. — Neu ist folgende Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von Hartogs: Eine analytische Funktion einer reellen Variablen x_1 und einer komplexen $y = y_1 + iy_2$ ist regulär im Innern eines dreidimensionalen Gebietes G im (x_1, y_1, y_2) -Raum, wenn sie auf dem (zusammenhängenden) Rand von G holomorph ist (vgl. dies. Zbl. **2**, 424). — Unter den verschiedenen möglichen Erweiterungen des Raumes zweier komplexen Veränderlichen zu einer geschlossenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit gibt Severi aus Gründen der Einfachheit und der algebraisch-geometrischen Tradition der komplexen projektiven Ebene den Vorzug und weist auf die sog. Segresche Mannigfaltigkeit V — eine reelle algebraische Mannigfaltigkeit 6. Grades im reellen achtdimensionalen projektiven Raum — hin, die als genaues Gegenstück zur Riemannschen Kugel die komplexe projektive Ebene darstellt. Man kann sie sich ganz im Endlichen gelegen denken; den komplexen Geraden entsprechen dann Ellipsoide, und die ∞^{16} komplexen projektiven Transformationen der Ebene stellen sich dar als die ∞^{16} reellen projektiven Transformationen der V in sich. — Für den Beweis des Hurwitzschen Satzes, daß eine in der ganzen komplexen projektiven Ebene meromorphe Funktion rational ist, schlägt Verf. vor, gleich folgenden, etwas allgemeineren Satz mit algebraisch-geometrischen Mitteln zu beweisen. Eine analytische Kurve $f(x, y) = 0$, die in der ganzen komplexen projektiven Ebene höchstens algebroide Singularitäten besitzt, ist algebraisch. — Die Abhandlung schließt mit einigen interessanten Folgerungen aus der Lösung des Dirichletschen Problems und mit Hinweisen auf Verallgemeinerungen für andere Differentialgleichungssysteme. — Bezüglich einer Bemerkung in einem der oben zitierten Referate (Zbl. **3**, 214) sei erwähnt, daß die Lösung des Dirichletschen Problems für die biharmonischen Funktionen zuerst vom Verf. gegeben worden ist, auch für das lokale Problem, woraus ja unmittelbar die Lösung im Großen folgt. Erich Kähler.

Geometrie.

Sona, L.: Superficie ortobariche di un corpo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 353—357 (1932).

Levi-Civita hatte [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. VI. s. 12, 535—546 (1930)] auf die Existenz von Kurven aufmerksam gemacht, deren Normalebene in einem Punkt P einen mit homogener Masse versehenen Körper in einem Bereich mit dem Schwerpunkt P schneidet. Verf. rechnet nach, daß diese Kurven eine Schar von Orthogonalflächen zulassen. Es handelt sich einfach um die seit Dupin in der Theorie des schwimmenden Körpers untersuchten Schwimmoberflächen, d. h. die Einhüllenden der Ebenen, die von dem Körper konstantes Volumen abschneiden. Daß diese Flächen die gewünschte Eigenschaft haben, folgt — worauf auch hingewiesen wird — unmittelbar aus dem Satz, daß diese Einhüllenden von den genannten Ebenen im Schwerpunkt des ebenen Schnitts berührt werden. Dieser Satz ist schon von Dupin, nicht erst von Peano, wie Verf. angibt, gefunden worden. W. Fenchel (Göttingen).

Lerl, Karel: Sur l'inversion de Laguerre. Rozhl. mat. přirodověd. 11, 118—129 (1932) [Tschechisch].

Cherubino, S.: Su di una proprietà delle curve intuitive sghembe. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 424—428 (1932).

En se rattachant à ses recherches précédentes sur cet argument [Sulle curve intuitive sghembe, dies. Zbl. 2, 285], l'A. démontre que le nombre des plans osculateurs à une courbe gauche intuitive quelconque, qui ont la même direction, est borné. Beniamino Segre (Bologna).

Tognetti, Mario: Sulle omografie iperspaziali che sono funzioni razionali di una data. Atti Accad. Sci. Torino 67, 7—28 (1932).

On fait quelques remarques préliminaires sur les notions de fonction rationnelle et d'équation satisfaite par une homographie (générale ou particulière), donnée moyennant ses racines caractéristiques, et on étudie les homographies qui sont des fonctions rationnelles entières (en particulier des puissances) d'une homographie assignée, en énumérant les différents cas possibles et en les distinguant entre eux par des considérations algébriques élémentaires. Enfin on retrouve d'une façon simple, et avec quelques précisions ultérieures, le théorème de Frobenius-Rosati sur l'équation minima d'une homographie. Beniamino Segre (Bologna).

Chisini, O.: Sulle trasformazioni cremoniane. Rend. Semin. mat. fis. Milano 5, 63—78 (1931).

In occasione del primo centenario della nascita di Luigi Cremona, l'A. espone le trasformazioni cremoniane, dimostrandone la generazione mediante il prodotto mediante il prodotto di trasformazioni quadratiche, e facendone vedere una applicazione alla ricerca delle assintotiche sulla rigata cubica. Autoreferat

Welchman, W. G.: Note on the trisecants and quadrisecants of a space curve. Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 206—208 (1932).

Als Grenzfall einer räumlichen C_p^n (Kurve der Ordnung n und vom Geschlecht p), die einen r -fachen Punkt besitzt (wo die r Tangenten r Geraden allgemeiner Lage sind), betrachtet der Verf. die zerfallende Kurve, welche aus einer C_p^{n-r} und aus den r Geraden besteht, die r allgemeine Punkte der C_p^{n-r} mit einem Punkte R verbinden. Man findet so durch Anwendung der Zerfallsmethode, daß die Ordnung der Regelfläche der dreifachen Sekanten einer C_p^n und die Anzahl ihrer vierfachen Sekanten im Falle, wo die C_p^n einen r -fachen Punkt besitzt bzw. folgende Erniedrigungen bekommen:

$$\frac{1}{3} \binom{r}{2} (3n - r - 4),$$

$$\binom{r}{2} \left[\frac{1}{6} (n - 3) (3n - 2r - 8) - p \right].$$

E. G. Togliatti (Genova).

Richmond, H. W.: On Cayley's problem of seven lines. J. London Math. Soc. 7, 113—117 (1932).

Es gibt keine Fläche 4. Ordnung F^4 , die 7 Geraden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 allgemeiner Lage enthält; wie müssen die 7 Geraden beschaffen sein, damit eine solche F^4 existiert? Für diese von Cayley gestellte und behandelte Aufgabe findet der Verf. eine hinreichende Bedingung von einem anderen Gesichtspunkte aus. Er beweist zunächst, daß zwei elliptische Kurven 6. Ordnung C_1^6 existieren, die die Geraden 1, 2, 3 je viermal und die Geraden 4, 5, 6, 7 je dreimal schneiden (diese C_1^6 erscheinen als weitere Schnittkurven von zwei geeigneten F^3 , die beide 1, 2, 3 enthalten, die die Gerade 6 in denselben 3 Punkten schneiden, während die erste die Gerade 4 und die zweite die Gerade 5 enthält). Solcher C_1^6 gibt es 70, je nach der Wahl der 3 viermal schneidenden Geraden. Die gesuchte hinreichende Bedingung ist nun folgende: Bedeutet C die Summe der Werte eines Abelschen Parameters auf (einer der 70) C_1^6 in ihren Schnittpunkten mit einer Ebene, so muß die ähnliche Summe für die 12 Punkte, wo die C_1^6 von den 4 Trisekanten getroffen wird, gleich $2C$ sein. In der Tat, wenn dies der Fall ist, so ist $4C$ die Parametersumme für die 24 Punkte, wo C_1^6 von den 7 Geraden getroffen wird, so daß diese Punkte die Postulation 23 für Flächen F^4 haben; und es ist möglich, durch sie und durch 11 weitere auf den 7 Geraden geeignet verteilte Punkte eine F^4 hindurchzulegen. Eine C_1^6 , die 1, 2, 3 viermal und 4, 5, 6 dreimal schneidet, hat nur drei Trisekanten, die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 die gefundene Bedingung erfüllen. *E. G. Togliatti.*

Room, T. G.: The Schur quadrics of a cubic surface. I. J. London Math. Soc. 7, 147—154 (1932).

Room, T. G.: The Schur quadrics of a cubic surface. II. J. London Math. Soc. 7, 154—160 (1932).

Jede Gerade einer F^3 trägt eine Punktinvolution: Die durch die Gerade hindurchlaufenden Ebenen bestimmen auf der F^3 als Restschnitte Kurven zweiter Ordnung, welche die Punktpaare dieser Involution auf der Geraden ausschneiden. Das Paar der Ruhepunkte dieser Involution wird nun, als Fläche zweiter Klasse aufgefaßt, zum Repräsentanten der Geraden gewählt. Aus den Gleichungen der so definierten Klassenflächen lassen sich dann die Gleichungen der mit den 36 Doppelsechsen der F^3 verbundenen Schurschen F^2 linear ableiten und die Zusammensetzungsformeln geben Auskunft über die linearen Beziehungen zwischen diesen F^2 . (Vervollständigung diesbezüglicher Sätze von Baker, Hudson und Dixon.) Diese Beziehungen werden durch die Abbildung der F^2 auf Punkte des R_9 — den 27 Geraden der F^3 und den 36 Schurschen F^2 entspricht dabei eine Punktconfiguration im R_5 — anschaulich gemacht. — In der zweiten Note werden einfache, von 10 Parametern abhängige kanonische Formen für die Gleichungen von 15 Schurschen F^2 abgeleitet. Zu diesem Zwecke wird die Konfiguration der 27 Geraden in bekannter Weise als Schnitt eines R_3 mit der im R_4 durch ein Quintupel assoziierter Ebenen bestimmten Konfiguration gewonnen. *E. A. Weiss (Bonn).*

Fano, Gino: Osservazioni sopra una nota del prof. H. F. Baker. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 93—96 (1932).

H. F. Baker (s. dieses Zbl. 2, 206) hatte, in einem fünfdimensionalen Raume S_5 , eine interessante Konfiguration von 10 V_4^3 des Perazzoschen Typus gefunden, die alle durch eine Fläche F^5 des S_5 hindurchgehen; die F^5 ist auf einer Ebene durch das System aller ebenen C^3 mit 4 Basispunkten eineindeutig abbildbar. Er hatte auch einige involutorische Homographien des S_5 bemerkt, die jene V_4^3 miteinander vertauschen. Die Sache wird hier vertieft und vervollständigt. Von der Betrachtung der 10 Geraden und der 5 Netze kubischer Raumkurven, die auf der F^5 liegen, ausgehend, bemerkt G. Fano, daß die ganze Konfiguration 120 Homographien in sich selbst gestattet; diese bilden eine Gruppe G_{120} , die mit der symmetrischen Gruppe von 5 Elementen holoedrisch isomorph ist. Darunter gibt es 25 Involutionen: 10 (erster Art) haben je 2 Ebenen von Doppelpunkten, lassen 3 der 5 Netze invariant und ver-

tauschen die 2 anderen miteinander; 15 (zweiter Art) haben je eine Gerade und einen S_3 von Doppelpunkten, lassen nur ein Netz invariant und vertauschen die 4 anderen paarweise miteinander. Es folgt daraus, daß 2 beliebige der V_4^3 durch 2 von den 15 Involutionen miteinander vertauscht werden können; je nach der Wahl der 2 V_4^3 sind die 2 Involutionen beide zweiter Art oder verschiedener Arten.

E. G. Togliatti (Genova).

Crenna, M.: *Sulle congruenze di Ribaucour deformabili. II.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 362—365 (1932).

In einer anderen Arbeit (s. dieses Zbl. 4, 18) hatte der Verf., als Anwendung einer Untersuchung von L. Bianchi, eine Ribaucoursche Kugelkongruenz betrachtet und aus den Differenzen der ersten und der zweiten Grundformen der Mäntel der Kugelenveloppe verschiedene Sätze hergeleitet. Jetzt bildet er, immer als Anwendung von Formeln von L. Bianchi, die Differenz der dritten Grundformen der Enveloppenmäntel, um verschiedene Eigenschaften derjenigen Linien zu erkennen, die auf den beiden Mänteln den Asymptotenlinien der Kugelmittelpunktsfläche entsprechen.

Dann werden die Kugelkongruenzen bestimmt, für die die Verhältnisse $\frac{E_0}{R_{11}}, \frac{F_0}{R_{12}}, \frac{G_0}{R_{22}}$ einen konstanten Wert k besitzen; es wird erkannt, daß für solche Kugelkongruenzen alle Kugeln nur in den Fällen (wo $k = 1, 2$ ist), die in der vorigen Arbeit schon betrachtet worden sind, durch einen Punkt hindurchgehen oder eine feste Ebene berühren können. Es wird am Ende bewiesen, daß in jedem Punkte der Mittelpunktsfläche ihre Krümmung zur Krümmung der betreffenden Kugel proportional ist. *E. G. Togliatti*.

Finikoff, S.: *Congruences dont les deux nappes de la surface focale sont projectivement applicables l'une sur l'autre par les points correspondants.* Bull. Sci. math., II. s. 56, 117—136 (1932).

Verf. hat nicht bemerkt, daß dasselbe Problem bereits vom Ref. behandelt wurde [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. 8, 552—554 (1928) und Fubini-Čech: Introduction à la géom. proj. diff. des surfaces, p. 249—253]; der Spezialfall, wo die projektive Deformation eine kollineare Verwandtschaft ist, wurde noch früher von Fubini erledigt (Fubini-Čech, § 27). Doch ist die Methode des Verf. eine andere, und es werden auch neue Ergebnisse abgeleitet. *Čech* (Brno).

Rangachariar, V.: *Surfaces whose asymptotic lines constitute a set of parallels.* J. Indian Math. Soc. 19, 144—150 (1932).

L'auteur donne quelques exemples des surfaces désignées au titre en examinant 1° les surfaces à courbure moyenne ou 2° totale constante, 3° les surfaces de révolution, 4° les surfaces gauches et 5° les surfaces dont les lignes asymptotiques se coupent sous un angle constant. 1° La seule surface en question est l'hélicoïde minimum. 3° La surface possède la propriété citée pour les deux familles des asymptotiques; son méridien est déterminé en quadratures. Les classes 2° et 4° sont vides.

S. Finikoff (Moscou).

Cattaneo, Paolo: *Sulla superficie luogo dei punti che distano da un'altra con una data legge.* Ist. Lombardo, Rend., II. s. 65, 173—176 (1932).

Von jedem Flächenpunkte einer Fläche F (im dreidimensionalen euklidischen Raume) wird auf der betreffenden positiven Flächennormalen eine Länge I abgetragen. Die so erhaltenen Endpunkte bilden eine zweite Fläche \bar{F} . Die erste und zweite Fundamentalform von \bar{F} läßt sich mittels der ersten und zweiten Fundamentalform und mittels der mittleren und Gaußschen Krümmung von F und der Invariante I ausdrücken. Der Beweis dieser Behauptung wird rechnerisch geliefert. *Hlavatý* (Prag).

Boos, Pierre: *Sur la relation qui existe entre un arc de courbe et l'angle sous lequel on le voit de son origine.* C. R. Acad. Sci., Paris 194, 1623—1625 (1932).

Auf einer Fläche F liege eine Kurve k , deren Punkte durch die Bogenlänge s auf k dargestellt sein mögen. Wenn a eine hinreichend kleine positive Zahl ist und s in einem geeigneten Intervall liegt, gibt es zu zwei Punkten $P(s)$ und $Q(s + a)$ von k genau einen

verbindenden geodätischen Bogen auf F . $c = c(s, a)$ sei der Winkel zwischen diesem Bogen und der Kurve k im Punkte P . Verf. kündigt eine allgemeine geometrische Untersuchung auf Grund vorgegebener Eigenschaften der Funktion $c(s, a)$ an und teilt das Ergebnis des besonders einfachen Falles mit, daß c nicht von s , sondern nur von a abhängt. Schließt man den Fall aus, daß k geodätisch, also $c \equiv 0$ ist, so gilt: Die Fläche F muß auf eine Rotationsfläche abwickelbar sein, so daß k in einen Breitenkreisbogen übergeht. Der Beweis wird nur angedeutet: Man wählt die Parallelkurven von k und die geodätischen Lote auf k als Parameternetz in F und diskutiert die Randwertaufgabe der Differentialgleichung, deren Lösung die geodätischen Sehnen von k sind; F wird als analytische Fläche vorausgesetzt. Aus dem angegebenen Ergebnis folgt, daß F von konstanter Gaußscher Krümmung sein muß, wenn durch irgendeinen Punkt von F unendlich viele Kurven vom Typus k gehen; für diesen Spezialfall wird ein einfacher Beweis mitgeteilt. *Cohn-Vossen (Köln).*

Topologie:

Schmidt, Friedrich Karl: Über die Dichte metrischer Räume. *Math. Ann.* 106, 457—472 (1932).

Es sei R ein metrischer Raum. Eine monotone Mengenfunktion $f(M)$ ist eine Funktion, die jeder Teilmenge M von R eine Kardinalzahl so zuordnet, daß aus $M_1 \leq M_2$ stets auch $f(M_1) \leq f(M_2)$ folgt. Die Ableitung $g(P)$ einer solchen monotonen Mengenfunktion $f(M)$ ist dann die Punktfunktion in R , die P die untere Grenze aller $f(U)$ zuordnet, wobei U alle Umgebungen von P durchlaufe. Dann gibt es stets eine Umgebung U_0 von P , so daß $g(P) = f(U_0)$ ist. — Wählen wir insbesondere $f(M) = \text{Mächtigkeit von } M$, so ist die Ableitung von f die Dichte $d(P)$ von R im Punkte P . — Versteht man weiter unter dem ε -Überdeckungscharakter der Menge M die kleinste Mächtigkeit derart, daß es Überdeckungssysteme von M dieser Mächtigkeit gibt, die aus in M offenen Mengen vom Durchmesser $< \varepsilon$ bestehen, so ist der Überdeckungscharakter $u(M)$ die obere Grenze aller ε -Überdeckungscharaktere von M . Die Ableitung $u(P)$ von $u(M)$ ist der Überdeckungscharakter von R in P . — Dann gilt stets: $d(P) \leq u(P)^*$. Ist R überdies vollständig, so gilt sogar, abgesehen von einer nirgends dichten Menge: $d(P) = u(P)^*$. Hat schließlich die Dichte im Punkte P_0 des vollständigen Raumes R ein relatives Minimum [d. h. $d(P_0) \leq d(P)$ für alle Punkte P einer gewissen Umgebung von P_0], so gilt: $d(P_0) = d(P_0)^*$. — Insbesondere läßt sich hieraus folgern: dann und nur dann existiert ein perfekt bewerteter Körper der Mächtigkeit \aleph_α , wenn $\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^*$ ist. *Reinhold Baer (Halle a. S.).*

Stephens, Rothwell: Continuous transformations of abstract spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 34, 394—408 (1932).

In terms of a definition of univocal continuous transformation of an abstract or general topological space due to Sierpinski [*Math. Ann.* 97, 321—327 (1926)] the following results are obtained. Let $f(P) = Q$ be continuous, and denote the inverse transformation by g . A necessary and sufficient condition that g be both univocal and continuous is that for every subset E of P , $f(E') = [f(E)]'$, where E' is the derived set of E . In neighborhood spaces a necessary and sufficient condition that a transformation be continuous is that for each point a and its transform b , the inverse image of every neighborhood of b is a neighborhood of a . In general if a transformation is continuous the inverse of every open (closed) set is open (closed). The addition of points of Q to the derived sets of Q leaves a transformation f continuous. — If a space P has one of the following properties its continuous transform $Q = f(P)$ has the property: self-nuclear, separable, every covering by open sets is reducible to a covering of lower cardinal number, for every monotone descending sequence of closed (completely closed) sets there exists a point common to the sets of the sequence. The following properties are not invariant: compactness, closure of a set, the four properties of F. Riesz, property B of Hausdorff, closure of derived sets, non-compactness, accessibility,

regular, normal, L -space in the sense of Fréchet. The required examples are submitted. However, the continuous transform of a space with the first three Riesz properties is compact. Bicontinuous univocal transformations transform interiors into interiors, and bcompact sets into bcompact sets. — A necessary and sufficient condition that a topological space P admit a univocal (biunivocal) continuous transformation to some neighborhood space Q , is that P contain no singular point, that is a point a which is in the derived set a' . If Q is connected and consists of at least two elements, conditions are found that P be continuously transformed into Q when Q has the first three properties of Riesz, or is an L -space of Fréchet. If the transformation of a compact space P to an L -space is biunivocal and continuous it is bicontinuous. A necessary and sufficient condition that P admit a continuous transformation to a normal space is that P be itself normal.

E. W. Chittenden (Jowa).

Reynolds jr., Clarence N.: Circuits upon polyhedra. *Ann. of Math.*, II. s. 33, 367—372 (1932).

Diese Arbeit handelt von einfach zusammenhängenden Polyedern. Es werden Bedingungen untersucht, welche es ermöglichen, die Flächen (Ecken) dieses Polyeders derart durch einen einfachen geschlossenen Bogen zu verbinden, daß jede Fläche (Ecke) genau einmal getroffen wird. Existenztheoreme für solche „Bogen“ wurden in allgemeinen Fällen, wo irgend drei Flächen kein mehrfach zusammenhängendes Gebiet bilden, von H. Whitney (vgl. dies. Zbl. 2, 161) angegeben. Der Verf. läßt diese Bedingung fallen und gibt notwendige und hinreichende Bedingungen, welche die Existenz von „Bogen“ auf einem gegebenen Polyeder reduzieren auf die Existenz spezieller „Bogen“ für das Polyeder, das man erhält, wenn eine Kante des ursprünglichen ausgelöscht wird.

F. Bohnenblust (Princeton N. J.).

Waraszkiewicz, Z.: Une famille indénombrable de continus plans dont aucun n'est Pimage continue d'un autre. *Fundam. Math.* 18, 118—137 (1932).

The author gives a negative solution to the problem of C. Kuratowski (*Fundam. Math.* 14, 235) as to whether or not every infinite sequence of sets contains one set which is the continuous image of at least one of the remaining sets in the sequence. Indeed, the author constructs a family P of power c of bounded plane continua having the property that no one of these continua is the continuous image of any one of the others. Thus certainly there exist sequences of such continua. The idea of the construction of the family P is based on the phenomenon, discovered by the author, that no continuous function which transforms the curve $y = \sin \pi/x$, $0 < x \leq 1$, (together with its continuum of condensation) into itself can at the same time carry in a (1—1) manner any sequence $[p_n] \rightarrow (0, 0)$ of this curve into any partial subsequence $[p_{n^k}]$ where $k > 1$. This phenomenon comprises a new invariant of continuous transformations which is of importance in connection with other problems in topology.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Aronszajn, N., et K. Borsuk: Sur la somme et le produit combinatoire des rétractes absolus. *Fundam. Math.* 18, 193—197 (1932).

If φ is a continuous function defined on a subset A of a topological space T , a continuous function ψ defined on T is called an extension of φ on T relative to a set B provided that $\psi(T) \subset B$ and $\psi(x) = \varphi(x)$ for every $x \in A$. In case $\varphi(x) = x$ for every $x \in A$, any extension of φ on T relative to A is called a function retracting T into A ; and when such a retracting function exists, A is said to be a retract of T . A space A is called an absolute retract provided that A is separable and metrisable and is a retract of every one of its metrisable containing spaces or, what is equivalent (see Borsuk, *Fundam. Math.* 17, 153), if A is homeomorphic with a retract of the fundamental cube Q_ω of the Hilbert space. The authors prove that if the metric space C be decomposed into two closed sets A and B such that $A \cdot B$ is a retract of C , then in order that C be an absolute retract it is necessary and sufficient that A and B be absolute retracts. The question as to whether one can conclude from the fact that A , B ,

and $C = A + B$ are absolute retracts that $A \cdot B$ is also an absolute retract remains open. By the combinatorial product, PE_n , of a finite or infinite sequence $[E_n]$ of sets is meant the set of all sequences $[x_n]$, where $x_n \in E_n$. If the sets E_n are topological spaces, one can easily define neighborhood and limit so that PE_n becomes a topological space; and if the spaces E_n are metrisable, so also is PE_n . The authors show 1° that if for each n , A_n is a retract of E_n , then PA_n is a retract of PE_n , and 2° that PQ_ω is homeomorphic with Q_ω ; and with the aid of these results they prove that if the sets A_n , ($n = 1, 2, \dots$), are absolute retracts, so also is the set PA_n . Whyburn.

Borsuk, Karol: Einige Sätze über stetige Streckenbilder. Fundam. Math. 18, 198 bis 213 (1932).

A property P is said to be cyclicly extendable provided that its validity in each cyclic element of a locally connected continuum implies its validity in the whole continuum and is said to be cyclicly reducible if its validity in the whole continuum implies its validity in each cyclic element of that continuum. [See Whyburn, G. T., Amer. J. Math. 50, 167—194 (1928); Kuratowski and Whyburn, Fundam. Math. 16, 305—337.] The author proves the cyclic extendability and reducibility of the following three properties which are denoted by F , H_n and R respectively: 1° The property of a topological space M to have a fixed point under every continuous transformation of M into a subset of itself; 2° The property of M that the transformation space K_n^M be connected, where K_n^M is the space whose elements are the continuous transformations of M on to the surface of the euclidean n -dimensional unit sphere, metrisized in a natural manner; and 3° The property of being an absolute retract (See the preceding review). In proving the cyclic extendability and reducibility of F , H_n and K_n^M , the author first shows that each of these properties is pointwise additive, where a property W is called pointwise additive provided that when each of two closed sets having only one common point has property W , so also does their sum. If S is any compact locally connected continuum (Streckenbild), the author calls any continuum in S which is the sum of an ordinary acyclic curve and a finite number of cyclic elements of S a reduction (Redukt) of S , and he uses these „Redukts“ as an intermediary step in his proofs for his principal theorems. This is made possible by virtue of the theorem that when a pointwise additive property W is valid in every degenerate subset of S , in every arc in S and in every cyclic element of S , then W is valid also in every „Redukt“ of S . As consequences of the cyclic extendability of F , (which has been proved also by Ayres for the case of topological transformations), there results that every acyclic curve has property F (theorem of Sherrer) and that the plane compact locally connected continua which do not separate the plane are characterized by property F . As corollaries to the cyclic extendability and reducibility of H_n the author obtains (1) the cyclic extendability and reducibility of the property of uncoherence (theorem of Kuratowski) and (2) that a compact locally connected continuum in euclidean n -space E_n fails to separate E_n when and only when no one of its cyclic elements separates E_n . The author's third principal theorem yields the facts that every acyclic curve is an absolute retract and that the absolute retracts in the plane are identically the compact locally connected plane continua which do not separate the plane. Finally, it is shown that the plane retracts (not necessarily absolute) may be characterized by the property of being locally connected continua (bounded or not) whose complementary domains are all unbounded.

Waraszkiewicz, Z.: Sur une famille des types de continuité qui remplit un intervalle. Fundam. Math. 18, 309—311 (1932).

If A and B are two sets lying in any topological spaces whatever, the type of continuity of A is said to surpass that of B , $cA > cB$, whenever B is a continuous image of A but A is not a continuous image of B ; in other words, when there exists a continuous function f defined on A such that $f(A) = B$ but there exists no continuous function φ such that $\varphi(B) = A$. In a previous article [Fundam. Math. 18, 118—137,

(1932), (see the preceeding review)], the author has constructed an uncountable family of plane continua such that the types of continuity of no two continua in this family are comparable in this sense. Using similar methods and employing the same auxiliary curves as in the former paper, the author constructs a family F of plane curves whose types of continuity, ordered according to magnitude, fill up an entire closed linear intervall.

G. T. Whyburn (Baltimore).

Klassische Optik.

Villani, F., e R. Bruseaglioni: Sulla forma delle frange d'ombra ottenute da onde affette da astigmatismo e coma. (*Istit. Naz. di Ottica, Firenze.*) Nuovo Cimento, N. s. 9, 23—27 (1932).

Im Anschluß an eine Arbeit von F. Scandone [Nuovo Cimento 8, 310 (1931); vgl. dies. Zbl. 3, 283] zur Prüfung durch Schattenstreifen bei mit Koma und Astigmatismus behafteten Wellen wird für die Zwecke der Praxis eine Ergänzung der Formeln Scandones vorgeschlagen, darauf beruhend, daß der Mittelpunkt des zur austretenden Wellenfläche gehörenden Normalensystems ja nur mit einer gewissen Näherung bestimmbar sei.

M. Herzberger (Jena).

Rostagni, A.: Über die bei der Totalreflexion im zweiten Medium strömende Energie. Ann. Physik, V. F. 12, 1011—1014 (1932).

Im Anschluß an eine Arbeit von F. Noether (vgl. dies. Zbl. 2, 363) sowie an eine frühere von J. Picht [Ann. Physik 3, 433 (1929)] betont der Verf., daß seiner Meinung nach für die in jenen Arbeiten behauptete Unzulänglichkeit der früheren theoretischen Betrachtungen bezüglich des Ursprungs der im zweiten Medium strömenden Energie kein Grund vorhanden sei. Er verweist auf eine Arbeit von A. Eichenwald, J. russ. phys.-chem. Ges. 41, 131 (1909), in der (rein graphisch) der Verlauf des Poyntingschen Vektors für die ebenen Wellen in beiden Mitteln bei der Totalreflexion behandelt wird. Er ist der Ansicht, daß die aus einfallender und reflektierter Welle resultierende Welle des ersten Mediums und die Welle des zweiten Mediums die Energie wechselweise durch jedes Element der Trennungsfläche sich austauschen, und glaubt, dies experimentell bestätigt zu haben. (Nach Ansicht des Ref. hat der Verf. den eigentlichen Kern der obengenannten Arbeiten von Picht und Noether nicht ganz verstanden. Es wird an anderer Stelle darauf eingegangen werden.)

Picht.

Boutaric, Augustin: Sur quelques relations entre les divers coefficients permettant d'exprimer les propriétés diffusantes d'une surface. Rev. Optique 10, 485—494 (1931).

Der Verf. gibt eine scharfe Definition der verschiedenen Koeffizienten diffuser Reflexion einer beliebigen Fläche und leitet aus den elementaren photometrischen Gesetzen gewisse Beziehungen ab. Bezeichnet d_α den Koeffizienten des nach allen Richtungen diffus reflektierten Lichtes für ein Lichtbündel, das unter dem Winkel α einfällt, und δ^α den Koeffizienten des in dieser Richtung α diffus reflektierten Lichtes für Licht, das von allen Seiten einfällt, so ist $d_\alpha = \pi \delta^\alpha$. — Die weiteren Rechnungen beziehen sich auf absolut matte Flächen, die nach allen Seiten das Licht gleichmäßig zurückwerfen, ohne Rücksicht auf den Einfallswinkel. Für diese auch als orthotrop bezeichnete Flächen ist die Brillanz eine Konstante und das Lambertsche Gesetz ist gültig.

P. Gruner (Bern).

Smith, T.: Secondary conjugate surfaces. (Opt. Dep., Nat. Phys. Labor., London.) Trans. Opt. Soc. 32, 129—149 (1931).

In der geometrischen Optik wird oft das Bild einer achsensenkrechten Ebene wieder als achsensenkrechte Ebene angesprochen, während dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Es werden die Beziehungen zwischen den konjugierten „zweiten“ oder sagittalen Flächen unter der Annahme einer kleinen Blende hergeleitet. Es ergeben sich 19 „Lehrsätze“ (Theoreme) über die Beziehung zwischen Objekt und Bildfläche, auf die einzugehen, hier zu weit führen würde. Die Ausführungen des Verf. sind als Beitrag zur dreidimensionalen Analysis sehr interessant.

Picht (Berlin-Lankwitz).

Laue, M. v.: Kreuzgitterspektren. Z. Kristallogr. 82, 127—141 (1932).

Der Verf. verweist zunächst darauf, daß bei der Beugung von Molekularstrahlen ein Kreuzgitter, nämlich das Atomgitter der als Begrenzung auftretenden Netzebene, nach den Ergebnissen der meisten Beobachter die Erscheinungen hervorruft und daher die Untersuchung der Kreuzgitter ebenso nötig sei wie die der Raumgitter. — Ein einzelnes Kreuzgitter ist durch zwei Verschiebungen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ bestimmt. Ihm wird durch die Beziehungen $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1) = (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2) = 1$, $(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2) = (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1) = 0$ ein in derselben Ebene liegendes „reziprokes“ Kreuzgitter zugerechnet. Die Richtung des einfallenden Strahls wird durch den Einheitsvektor \mathfrak{s}_0 festgelegt, es wird untersucht, wann in der Richtung des Einheitsvektors \mathfrak{s} ein Interferenzmaximum liegt. Es sei der Vektor $\mathfrak{s} - \mathfrak{s}_0 = \mathfrak{S}$ ($|\mathfrak{S}| = 2 \sin \frac{\chi}{2}$, wenn χ der Winkel zwischen beiden Vektoren ist). Die Bedingung für ein Maximum wird $k\mathfrak{S} = 2\pi(h_1 \mathfrak{B}_1 + h_2 \mathfrak{B}_2 + \alpha \mathfrak{n})$. Hier ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, h_1 und h_2 sind beliebige ganze Zahlen, \mathfrak{n} der Einheitsvektor senkrecht zur Gitterebene. α ist zunächst noch unbekannt, doch genügen die beiden Gleichungen für \mathfrak{S} , um für feste h_1 und h_2 die drei Komponenten von \mathfrak{S} und die Zahl α zu bestimmen. Laue gibt indessen eine Bestimmung durch Zeichnung an und zeigt, daß im allgemeinen zwei Richtungen von \mathfrak{s} auftreten, bei einem undurchsichtigen Gitter fällt die eine fort. Der Verf. vergleicht das Ergebnis mit dem entsprechenden bei einem Raumgitter, das er bei einer früheren Untersuchung [Z. Kristallogr. 64, 115 (1926)] erhalten hatte. Eine merkliche Lichtwirkung findet sich beim Kreuzgitter nur in der Nähe von Richtungen, die durch bestimmte Lote auf der Kreuzgitterebene festgelegt werden. L. geht nun zur Behandlung eines Kreuzgitterpulvers über, d. h. einer Menge völlig unregelmäßig liegender gleicher Kreuzgitter. Er nimmt diese zunächst als durchsichtig an. Weiter soll das Licht nicht nur in einer Richtung, sondern in einem, wenn auch kleinen, Raumwinkel einfallen. Das durch ein gewisses Beugungsmaximum (h_1, h_2) in einer bestimmten Richtung erzeugte Licht ist dann nur von dem Winkel χ abhängig, den diese Richtung mit der Achse \mathfrak{s}_0 des einfallenden Bündels bildet; und zwar kann man ableiten:

$$I_{h_1, h_2} = C \cdot \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \chi \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \chi - \sin^2 \frac{1}{2} \chi_g}}, \text{ wobei } 2 \sin \frac{1}{2} \chi_g = \lambda |h_1 \mathfrak{B}_1 + h_2 \mathfrak{B}_2|.$$

Für $\chi < \chi_g$, in der Nähe der Einfallsrichtung, liefern die Beugungsmaxima, mit Ausnahme des nullten, keine Wirkung. Für $\chi = \chi_g$ ist nicht etwa $I = \infty$, da die Formel mit Vernachlässigungen abgeleitet ist, die in unmittelbarer Nähe dieses Grenzwinkels nicht zulässig sind; allerdings aber ist hier das Maximum, das durch einen endlichen Sprung erreicht wird. Im einzelnen kann das Ergebnis noch durch die Gestalt des Gitterelements, den Formfaktor, geändert werden. Bei einem Versuch werden sich ferner die durch verschiedene h_1, h_2 entstandenen Intensitätskurven übereinander legen, die gesamte Intensität wird bei den verschiedenen χ_g Maxima haben, die nach kleineren Winkeln scharf, nach größeren langsamer abfallen. — Für ein undurchsichtiges Kreuzgitterpulver erhält der Verf. zwei verschiedene Formeln:

$$I_{h_1, h_2} \cos \frac{1}{2} \chi = C \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\arcsin X}{X};$$

$$X = \frac{\sin \frac{1}{2} \chi \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \chi - \sin^2 \frac{1}{2} \chi_g}}{\sin \frac{1}{2} \chi_g \cos \frac{1}{2} \chi} \text{ für } \sin \frac{1}{2} \chi_g \leq \sin \frac{1}{2} \chi \leq \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \chi_g}.$$

$$I_{h_1, h_2} \cos \frac{1}{2} \chi = \frac{C}{X} \text{ für } \sin \frac{1}{2} \chi > \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \chi_g}.$$

Auch hier zeigt die Kurve einen Sprung von Null auf einen endlichen Wert für $\chi = \chi_g$, sie erreicht ihr Maximum aber erst für $\sin \frac{1}{2} \chi = \sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} \chi_g}$. Auch die durch Überlagerung entstehende Kurve wird bei den Werten χ_g Sprungstellen haben. Zum Schluß bespricht der Verf. die Versuche von R. Sugiura. Dieser war im Gegensatz zu den

übrigen Beobachtern zu Ergebnissen gelangt, die er als Raumgitterinterferenzen deutete. L. schließt aus seinen Formeln, daß auch Sugiuras Versuche qualitativ als Kreuzgitterergebnisse deutbar seien, eine quantitative Prüfung sei zur Zeit nicht möglich.

Hans Boegehold (Jena).

Relativitätstheorie.

Mandel, H.: Studien zur Möglichkeit der Einführung von komplexen Größen in der Raum-Zeit-Metrik von Minkowski. Izv. Akad. Nauk S.S.S.R., Otdél. mat. i estest. Nauk, VII. s. Nr 6, 755—767 (1931).

The indefinite character of the four dimensional linear element of special relativity leads to the introduction of vectors with real absolute value and vectors with imaginary value. The author admits complex unitary values of the imaginary vector, but lets the coordinate transformations be real. This leads to a five dimensional system of vectors corresponding with the results of five dimensional relativity. Then follow some suggestions on the introduction of quaternions into the world metric. Not the components of a vector are united into a hypercomplex number, but the four perpendicular „Bein“-vectors into a so-called „quaternion vector“. This allows us to cast Dirac's equations into the form of a quaternion product. Ref. has the feeling that all these questions can only be sufficiently clarified by a consequent starting with sedenions as the central original hypercomplex number system, as done by Schouten in lectures delivered at the Massachusetts Institute of Technology [see J. Math. and Phys. 10, 239—283 (1931)].

Struik (Cambridge).

Schouten, J. A.: Dirac equations in general relativity. I. Four dimensional theory. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 10, 239—271 (1931).

Es werden vorerst die Grundlagen des allgemeinen Übertragungskalküls skizziert. Die Diracschen α^k -Zahlen erscheinen als kokontravariante Größen des Spin-Raumes. Es wird kein Fundamentaltensor im Spin-Raum eingeführt, doch mit Hilfe der immer existierenden „Bivektor-Dichte“ ε ist es möglich, aus den α^k ein System von kovarianten ε^k abzuleiten, so daß $\bar{\psi} \varepsilon^k \psi$ eine Bedeutung hat. Neu ist hierbei die Folgerung, daß die ε^k Dichten vom Gewicht -1 sind und die Komponenten ψ^c und $\psi^{\bar{c}}$ des Spin-Vektors ψ Dichten vom Gewicht $+\frac{1}{2}$. Es wird bewiesen, daß die kovariante Differentiation von kontravarianten Spin-Vektoren vom Gewicht $+\frac{1}{2}$ eindeutig durch die gewöhnliche kovariante Differentiation bestimmt ist. Der Einfluß des Gravitationsfeldes verändert die Komponenten des Potential-Vektors von gewöhnlichen Zahlen in Diracsche Zahlen. Zuletzt werden die Diracschen Gleichungen im allgemeinen Riemannschen Raum aus einem Variationsprinzip abgeleitet. Die benutzte Invariante unterscheidet sich von der von Weyl benutzten nur durch ein zusätzliches Glied, das infolge des nichtsymmetrischen Charakters der Übertragung auftritt.

Lanczos.

Schouten, J. A.: Dirac equations in general relativity. II. Five dimensional theory. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 10, 272—283 (1931).

Hier wird dargelegt, daß das Massenglied der Diracschen Gleichung automatisch erscheint, wenn man die Zahl der Dimensionen auf 5 erhöht. Es wird ausgiebiger Gebrauch gemacht von einem von Clifford eingeführten System von hyperkomplexen Zahlen, der „Sedenionen“. Die einfachste Wellengleichung erster Ordnung in 5 Dimensionen unterscheidet sich von der 4-dimensionalen Gleichung etwas und gibt gerade Veranlassung zum Auftreten eines Termes, das die Eigenschaften des Massengliedes zeigt, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind, nämlich, daß die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit im V_5 holonom ist und daß das kovariante Differential des Spin-Vektors ψ^c senkrecht zur Raum-Zeit-Fläche verschwindet.

Lanczos (Lafayette).

Schouten, J. A., und D. van Dantzig: Über eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 34, 1398—1407 (1931).

Die Aufgabe der Arbeit ist zu zeigen, daß die Einstein-Mayersche Feldtheorie, in der die fünfte Dimension nicht vollständig eliminiert ist, in ungezwungener Weise

interpretierbar ist, ohne die neuen Feldgleichungen zu verlieren. Es muß dabei eine zuerst von Möbius eingeführte Addition von Punkten benutzt werden, bei der jeder Punkt ein Gewicht erhält und damit durch 5 Bestimmungsstücke charakterisiert wird. Die Abbildung benachbarter lokaler Gebiete ist nicht mehr affin, sondern projektiv, und damit ordnet sich die neue Feldtheorie ein in eine Reihe von Untersuchungen über projektive Übertragungen, wie sie seit 1921 von verschiedenen Autoren, in der letzten Zeit besonders von Veblen und Hoffmann [Physic. Rev. **36**, 810 (1930)] durchgeführt wurde. *Lanczos (Lafayette).*

Giorgi, G.: Nuove idee sulla teoria di relatività. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **15**, 177—180 (1932).

Given an electric particle or group of particles of the same sign (i. e. either protons or electrons), it is possible to choose a system of reference relative to which the force on the particle or group of particles is zero. So at every point-event of space-time exists a particular inertial system and therefore a particular metric. In the absence of electromagnetism the matrix of space-time is that of Einstein's general theory, but the electromagnetic field consists of a separation (sdoppiamento) of this matrix into two others, one suitable for positive particles and the other for negative. To a neutral material system (e. g. a normal atom) belongs neither the one nor the other, so that apparently there exists an intermediate or purely gravitational metric. General relativity therefore does not hold in the immediate neighbourhood of matter, so that the fact that the equations of Dirac and other authors are non-relativistic need cause no surprise. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

Omara, M. A.: Relativistic precession of periodic orbits in central force fields. Philos. Mag., VII. s. **13**, 722—732 (1932).

Verf. untersucht die Bahn eines Massenpunktes unter dem Einfluß einer Zentralkraft bei Berücksichtigung der relativistischen Massenveränderung. Ausgehend von der relativistischen Jacobi-Hamiltonschen Gleichung und der zugehörigen Bahngleichung wird zunächst in bekannter Weise für den Periodenwinkel aus der Integraldarstellung eine Näherungsformel hergeleitet; sodann durch näherungsweise Integration der Bewegungsgleichung des Problems eine approximative Darstellung der Bahnkurve in der Form $\frac{1}{r} = a + A \cos(\omega \vartheta - \varepsilon)$, woraus dann wieder wie oben der Ausdruck $\theta = \pi : \omega$ für den Periodenwinkel folgt. — Durch Umformung von ω ergibt sich eine zweite Darstellung für θ , welche einen Vergleich mit der entsprechenden Formel der Newtonschen Dynamik zuläßt: Ist θ_1 der entsprechende Winkel der Newtonschen Dynamik, so ist $\theta = \theta_1 \gamma^{-1}$, wobei γ einen von c , von der Geschwindigkeit v und von der potentiellen Energie abhängigen Korrekturfaktor bedeutet. Wenn die Bahn bei der Bewegung im Newtonschen Falle geschlossen ist, $m \theta_1 = n \pi$, so bleibt im relativistischen Falle r ungeändert, während ϑ durch $\vartheta + 2m\theta$ zu ersetzen ist und der Perihelpunkt, von dem aus ϑ jetzt zu messen ist, ist um $2m\theta_1(\gamma^{-1} - 1)$ vorwärtszurücken. — Anwendung der Ergebnisse speziell auf die Kepler- und die Zentralellipse. — Sodann direkte Behandlung des Falles der Zentralellipse; explizite Durchführung der Integration mit Hilfe der \wp -Funktion. *Hans Schwerdtfeger (Göttingen).*

Beck, Guido: Über die Bewegungsgleichungen beschleunigter Ladungen. Z. Physik **75**, 476—487 (1932).

Es wird versucht zu zeigen, daß Energie und Impuls einer sich gemäß der Dynamik der speziellen Relativitätstheorie beschleunigt bewegenden Punktladung bei Mitnahme der Abraham-Heavisideschen Reaktionskraft der Strahlung vom Beschleunigungszustand abhängt. Hiernach würden in einem hinreichend starken Gravitationsfeld Elektron und Proton nicht mehr gleich schnell fallen, auch müßte ein Lichtquant sich nicht unbedingt längs einer geodätischen Linie bewegen, wie man bisher auf Grund des Äquivalenzprinzips annahm. Die „Beschleunigungsenergie“ könnte auch für die Atomkerne von Bedeutung sein. Schließlich wird die Korrespondenz zwischen

einem klassischen und einem quantentheoretischen relativistischen Modell im Hinblick auf die bekannten Schwierigkeiten der heutigen relativistischen Quantentheorie und mit Ausblick auf die — hiermit zusammenhängenden — fundamentalen Schwierigkeiten, die zur Zeit einer theoretischen Erfassung der Kernelektronen im speziellen, der Kerne im allgemeinen entgegenstehen, diskutiert. *Guth (Wien).*

Straneo, Paolo: *Intorno alla teoria unitaria della gravitazione e dell'elettricità.*

IV. Discussione e perfezionamento della teoria precedente. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 77—82 (1932).*

Besprechung der Grundannahmen der vom Verf. betrachteten einheitlichen Feldtheorie, die auf einem außer der Krümmung auch noch eine Torsion implizierenden Zusammenhang basierte, nebst Ergänzungen. Hinweis auf eine frühere Arbeit von Infeld [*Physik. Z. 29, 810 (1928)*], die ähnliche Annahmen enthält. *Guth (Wien).*

Infeld, L.: Remarques sur le problème de la théorie unitaire des champs. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 15, 157—160 (1932).*

§ 1. Hinweis auf die prinzipielle Äquivalenz der Ansätze des Verf. (vgl. vorst. Referat) und von Straneo. § 2. Versuch der Aufstellung eines Kriteriums für die vorgeschlagenen verschiedenen vierdimensionalen und ein quadratisches Linienelement voraussetzenden einheitlichen Feldtheorien, unter Annahme der eindeutigen Bestimmbarkeit der g_{ik} mittels Maßstäbe und Uhren. *Guth (Wien).*

Ruse, H. S.: Note on refraction and reflection in general relativity. *Atti pontif. Accad. Sci. 84, 662—672 (1931).*

Die Methode von Levi-Civita, die Gesetze der Reflexion und Brechung abzuleiten aus der Untersuchung des Verhaltens der geodätischen Nulllinien an einer Singularitätsfläche der Metrik (vgl. dies. Zbl. 2, 367) wird für den Fall verallgemeinert, daß die Medien optisch anisotrop sind. Die korrespondierenden allgemeineren Formeln werden aufgestellt und mit den früheren verglichen. *Lanczos (Lafayette).*

Haas, Arthur: *Über die Beziehung zwischen Krümmungsradius der Welt und Elektronenradius.* *Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 11, 91—92 (1932).*

Maneff, G.: Über das kosmologische Problem der Relativitätstheorie. (*Physik. Inst., Univ. Sofia.*) *Z. Astrophys. 4, 231—240 (1932).*

Verf. glaubt eine Erklärung der systematischen Radialgeschwindigkeiten außer-galaktischer Nebel auf Grund der Relativitätstheorie unter Benutzung statischer Linienelemente für den mit Materie erfüllten Raum geben zu können.

Heckmann (Göttingen).

Tolman, Richard C.: Models of the physical universe. (*California Inst. of Technol., Pasadena.*) *Science 1932, 367—373.*

Vortrag, gibt, ohne auf Einzelheiten einzugehen, einen ziemlich vollständigen Bericht über die auf der Annahme eines nichtstatischen Linienelementes beruhende relativistische Kosmologie. Die eigenen, hauptsächlich thermodynamischen, Untersuchungen des Verf. sind besonders berücksichtigt. *Heckmann (Göttingen).*

Maneff, G.: Über die Welt in Ausdehnung. (*Physik. Inst., Univ. Sofia.*) *Z. Astrophys. 4, 241—246 (1932).*

Die Tatsache, daß in einer nach der Friedmann-Lemaître'schen Theorie aufgebauten Welt ein Beobachter bei einigen Lösungszweigen der auftretenden Differentialgleichungen prinzipiell nur Teile („Kalotten“) des Raumes überblicken kann, veranlaßt den Verf. zu kritischen Bemerkungen. *Heckmann (Göttingen).*

Quantentheorie.

Flint, H. T.: The uncertainty principle in modern physics. *Nature 1932 I, 746—747.*

Placinteanu, Jean J.: Déduction des équations de Maxwell à l'aide du tenseur ondulatoire d'Eddington. *C. r. Acad. Sci., Paris 194, 1054—1057 (1932).*

Ellis, C. D.: Structure of atomic nuclei. *Nature* 1932 I, 674—676.

Bericht über eine Diskussion in der Royal Society, in welcher die letzten experimentellen Ergebnisse auf dem Gebiete der Kernphysik behandelt wurden. Cockroft und Walton konnten durch Verwendung von künstlich beschleunigten Protonen von einigen hunderttausend e-Volt neuartige Atomzertrümmerungsprozesse nachweisen, bei welchen vermutlich ein Proton von einem Kern eingefangen und ein α -Teilchen emittiert wird. Derartige Zertrümmerungen wurden bei Li, B, C gefunden. Anzeichen für diese Prozesse ergaben sich auch bei N, Fl, Al. Kein Effekt wurde bei O und Cu gefunden. — Chadwick hat auf Grund von Versuchen von Mme I. Curie und F. Joliot geschlossen, daß die von einigen Substanzen, insbesondere Be und B, bei Bombardierung mit α -Strahlen emittierten durchdringenden Strahlen zum Teil schnell bewegte Neutronen sind, Teilchen, deren Masse ziemlich genau mit der des Protons übereinstimmt und welche keine elektrische Ladung tragen. Diese Neutronen lassen sich dadurch nachweisen, daß sie beim Durchgang durch leichte Elemente Zusammenstöße mit Atomkernen erfahren und diese in Bewegung setzen. Ein Neutron ist als ein aus einem Proton und einem Elektron bestehendes Aggregat anzusehen, welches auf einem Gebiet von Kerndimensionen konzentriert ist. Aus der Energiebilanz der Prozesse, welche zur Emission von Neutronen führen, läßt sich die Packungsenergie eines Neutrons abschätzen und hat die Größe von etwa 1 Million e-Volt.

G. Beck (Wien).

Gamow, G.: Nuclear α - and p -levels. (*Inst. of Physics, Acad. of Sci. USSR., Leningrad.*) *Physik. Z. Sowjetunion* 1, 433—435 (1932).

Auf Grund der Tatsache, daß die Protonen dem Pauli-Prinzip genügen, muß geschlossen werden, daß in Kernen vom Typus $4n + 3$ zwei Protonenzustände von merklich verschiedener Energie besetzt sind. Kerne vom Typus $4n + 3$ emittieren im allgemeinen beim Bombardement mit α -Strahlen zwei Reichweitengruppen von Protonen, die übrigen zertrümmerbaren Elemente nur eine einzige. Verf. versucht nun zu schließen, daß bei einem Zertrümmerungsprozeß das α -Teilchen stets im energetisch tiefsten Zustand eingefangen wird, und daß jeweils jedes Protonenniveau zu einer bestimmten Reichweitengruppe von H -Strahlen Anlaß gibt.

G. Beck (Wien).

Brogie, M. de, et L. Leprince-Ringuet: Sur la dispersion des neutrons du glucinium et l'existence de noyaux de recul provoqués par le lithium excité. *C. R. Acad. Sci., Paris* 194, 1616—1617 (1932).

Experimentelle Untersuchung der Streuung von Neutronen durch verschiedene Substanzen unter großem Winkel ($\vartheta > 45^\circ$). Die Anzahl der gestreuten Teilchen erweist sich dabei bei dicken Schichten von Streusubstanz (so daß jedes Neutron einen Zusammenstoß mit einem Kern erfährt) von derselben Größenordnung wie die der einfallenden Strahlen. — Versuche mit Li ergaben, daß auch diese Substanz beim Bombardement mit α -Strahlen in geringer Anzahl Neutronen emittiert.

G. Beck (Wien).

Shortley, George H.: The theory of complex spectra. (*Palmer Physic. Labor., Univ., Princeton.*) *Physic. Rev., II.* s. 40, 185—203 (1932).

Ein Atom möge normale Kopplung der Elektronen haben. Eine Konfiguration von η Elektronen und einer Schale, der ε Elektronen zum Abschluß fehlen, hat dieselbe Termmannigfaltigkeit wie eine Konfiguration aus den gleichen η Elektronen und ε Elektronen der genannten Schale. Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß auch die Termwerte (in der ersten Näherung) sich ganz analog berechnen lassen wie im Falle der $\eta + \varepsilon$ Elektronen. In der elektrischen Energie treten auch die Slaterschen Integrale $J - \delta K$ für jedes Elektronenpaar auf, sie erhalten das negative Zeichen, wenn sie ein fehlendes mit einem zugefügten Elektron verknüpfen. Auch die magnetische Energie berechnet sich in entsprechender Weise, bei den fehlenden Elektronen ist das Vorzeichen der Spin-Bahn-Wechselwirkung umgekehrt als bei den zugefügten. Der zweite Teil befaßt sich mit der magnetischen Wechselwirkungsenergie. Eine Lücke in den bisherigen Betrachtungen wird geschlossen für den Fall zweier Elektronen

mit normaler Kopplung und für den Fall der Zufügung eines Elektrons zu einem Multiplett des Ions. Schließlich wird noch die magnetische Wechselwirkung von Konfigurationen miteinander untersucht. *F. Hund* (Leipzig).

Blaton, J.: Über die Dispersion des Lichtes in der Umgebung von Quadrupollinien. (*Zakład. fiz. teoret., politechn. Lwowskiej, Lwów.*) *Acta Physica Polon.* 1, 209—221, dtsh. Zusammenfassung 209—210 (1932) [Polnisch].

The adsorption of gases by solids. A general discussion. *Trans. Faraday Soc.* 28, 316—409 (1932).

Diese „General Discussion“ enthält in ihrem theoretischen Teil III, der hier allein zur Besprechung steht, Beiträge von M. Polanyi, J. E. Lennard-Jones, M. Volmer, M. G. Evans, R. H. Fowler, J. A. V. Butler, E. Hückel, A. Magnus, J. K. Roberts, A. F. H. Ward, C. Schuster, J. W. McBain. Die Beiträge sind teils zusammenfassender Art über in der Hauptsache schon bekannte Dinge, teils enthalten sie wesentlich neue Gesichtspunkte zur Theorie der Adsorptionsvorgänge, wobei die Ausführungen in den verschiedenen Beiträgen öfters in engem Zusammenhang stehen. Es sollen daher die Beiträge nicht einzeln, sondern im Zusammenhang besprochen werden unter Hervorhebung der wesentlich neuen Gesichtspunkte. Es sind hauptsächlich vier Punkte von besonderem theoretischem Interesse, die Gegenstand der Diskussion bildeten: 1. Die van der Waalschen Adsorptionskräfte; 2. die von Benton und White sowie Taylor entdeckte sog. „aktivierte Adsorption“; 3. die Wanderung von adsorbierten Molekülen längs Oberflächen; 4. Diskontinuitäten in den Adsorptionsisothermen, wie sie von Allmand u. a. gefunden wurden. — Für die van der Waalschen Adsorptionskräfte, die man früher im wesentlichen statisch zu interpretieren suchte, ist neben den statischen Effekten der sog. „Dispersionseffekt“ von wesentlicher Bedeutung, den zuerst London theoretisch untersucht hat. Diese „Dispersionskräfte“ sind typisch quantenmechanischer Natur; in die klassische Theorie übersetzt, kann man sie etwa als Kräfte interpretieren, die auf Phasenbeziehungen der Elektronenbewegungen aufeinander wirkender Moleküle beruhen. Lennard-Jones gibt eine Berechnung dieser Kräfte für einfache Moleküle in der Nähe einer Metalloberfläche und von Kristalloberflächen von Kristallen vom Typ KCl. Quantitativ ist diese Berechnung allerdings insofern nicht, als man die bei großer Annäherung auftretenden abstoßenden Kräfte theoretisch nicht beherrscht. — Die sog. aktivierte Adsorption, zu welcher in dem hier nicht zu besprechenden Teil der Diskussion experimentelle Beiträge geliefert wurden, besteht in folgendem. Bei tiefer Temperatur (T) beobachtet man z. B. bei der Adsorption von H_2 an Ni gewöhnliche Adsorption mit Adsorptionswärmen von der Größenordnung 1000—2000 cal/Mol, die als von der Waalschen Energien zu deuten sind. Mit zunehmender T nimmt die Adsorption zunächst normal ab, um dann aber (im angegebenen Beispiel von etwa -180° an) wieder zuzunehmen; die Adsorptionsenergie steigt hier bis zur Größenordnung 30000 cal/Mol; bei noch höherem T (von etwa -100° an) wird die Adsorption wieder geringer. — Außerdem gibt es bei höherem T in manchen Fällen noch einen anderen Typus von aktivierter Adsorption (z. B. von Ward bei H_2 an Cu eingehend untersucht). Die Einstellung des Gleichgewichts hierfür kann Monate benötigen. Zufolge dieser langsamen Einstellungsgeschwindigkeit ist es möglich, diesen Vorgang von gewöhnlicher Adsorption zu trennen. Die aufgenommenen Mengen steigen anfangs proportional \sqrt{t} (t = Zeit). Für die T -Abhängigkeit der Einstellungsgeschwindigkeit ist eine Aktivierungswärme von rund 14000 cal maßgebend. — Die aktivierte Adsorption wird von Lennard-Jones auf eine Dissoziation der adsorbierten Moleküle zurückgeführt, wobei die freien Atome durch Leitungselektronen eine Valenzbindung mit dem Metal (Me) eingehen. Für tiefe T findet die Dissoziation nicht statt wegen der zu großen Potentialschwelle, die den Zustand $MeHH$ von $Me + H_2$ trennt; für hohe T nicht, weil die Verweilzeit eines Moleküls in der Nähe der Oberfläche für die Reaktion zu kurz ist. Dieses Bild ist mit den gefundenen Aktivierungswärmen vereinbar und erklärt weiter einige Einzelheiten des beobachteten Verhaltens. Die langsame aktivierte Adsorption kommt nach Lennard-Jones dadurch zustande, daß das adsorbierte Gas längs der Oberfläche des Metalls in dessen „innere“ Oberfläche (Oberfläche zwischen Gittersprünge) diffundiert. Die diffundierende Menge ist anfänglich proportional \sqrt{t} . Die T -Abhängigkeit erklärt sich dadurch, daß die Diffusion längs der Oberfläche in einem Wandern der Moleküle über ein infolge der atomistischen Struktur des Adsorbens periodisches Potentialgebirge besteht, wobei für die Übergänge von einer Mulde in die andere eine Aktivierungswärme maßgebend ist. Diese Deutung stimmt im wesentlichen mit der von Ward gegebenen überein, der den Vorgang aber „Lösung“ nennt. — Für die Erklärung des stufenweisen Anwachsens der Isothermen bei der van der Waalschen Adsorption werden verschiedene Möglichkeiten diskutiert, von denen aber keine voll befriedigt. Es scheint notwendig, weitere experimentelle Ergebnisse abzuwarten. — Die Beiträge von Fowler und Butler beziehen sich auf die von Gurney entwickelte Theorie der reversiblen elektrolytischen Zelle und der Überspannung [*Proc. Roy. Soc. A.* 134, 137 (1931); 136, 378 (1932)]. *E. Hückel* (Stuttgart).

Mecke, R.: Valenz- und Deformationschwingungen mehratomiger Moleküle. III. Methan, Acetylen, Äthylen und Halogenderivate. (*Physik.-Chem. Inst., Univ. Heidelberg.*) Z. physik. Chem. B 17, 1—20 (1932).

Die allgemeinen Gesichtspunkte einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 4, 135) werden auf vier- und mehratomige Molekeln angewandt. *F. Hund* (Leipzig).

Radaković, Michael: Studien zum Raman-Effekt. XVII. Über die möglichen Kraftverteilungen im mechanischen Modell eines dreiatomigen Moleküles. S.-B. Akad. Wiss. Wien 141, 41—54 (1932).

Die Molekel MN_2 wird durch ein System aus drei Massenpunkten idealisiert. Der allgemeinste Kraftansatz in der Nähe der ein gleichschenkliges Dreieck bildenden Gleichgewichtslage wird untersucht. Er enthält vier unabhängige Konstanten, für die einige Ungleichungen bestehen. Aus den drei Frequenzen des Systems läßt sich also kein eindeutiger Schluß auf die Kräfte ziehen. Es werden daher solche Fälle von Beziehungen zwischen den vier Konstanten diskutiert, die formal einfach sind oder auf frühere Ansätze führen. *F. Hund* (Leipzig).

Henry, P. S. H.: The energy exchanges between molecules. (*Colloid Sci. Labor., Univ., Cambridge.*) Proc. Cambridge Philos. Soc. 28, 249—255 (1932).

Es hat sich gezeigt, daß die aus der Schallgeschwindigkeit berechneten spezifischen Wärmen von Gasen weder mit den theoretischen noch mit den bei langsamer Erwärmung gemessenen spezifischen Wärmen übereinstimmen. Die Ursache hierfür ist wahrscheinlich in einer Verzögerungserscheinung beim Energieaustausch zu suchen. Die Theorie erstreckt sich auf die zeitliche Änderung der Schwingungsenergie E_x bis zur Erreichung der Gleichgewichtsenergie E_T ; dieser Vorgang gehorcht näherungsweise der Gleichung $dE_x/dt = \frac{1}{\beta} (E_T - E_x)$, worin β die Relaxationszeit der Schwingungsenergie bedeutet. Denkt man ein Gas, dessen Schwingungsfreiheitsgrade dem angegebenen Ansatz genügen, einer periodischen adiabatischen Energiezufuhr ausgesetzt, so ergibt sich die scheinbare spezifische Wärme zu

$$(C_v^2 + \omega^2 \beta^2 C_\alpha^2) / (C_v + \omega^2 \beta^2 C_\alpha),$$

worin C_v die gesamte spezifische Wärme im Gleichgewicht, C_α den Translations- und Rotationsanteil derselben, ω die Frequenz bedeuten. Man kann die Absorption des Schalls durch die Anzahl der Wellenlängen beschreiben, die der Schall durchläuft, bis seine Amplitude auf den e -ten Teil absinkt. Das so definierte Absorptionsvermögen hat ein Maximum bei der Frequenz

$$1/\beta \sqrt{C_\alpha(C_\alpha + R)/C_v(C_v + R)},$$

dessen Wert von der Relaxationszeit unabhängig ist und nur vom Anteil der Schwingungen zur gesamten spezifischen Wärme abhängt. *Eisenschitz* (Berlin).

Honda, Kôtarô, Tamotu Nishina und Tokutarô Hirone: Eine Theorie der durch hydrostatischen Druck verursachten Änderung des elektrischen Widerstandes in Metallen. Z. Physik 76, 80—90 (1932).

Zur Erklärung der Abhängigkeit des elektrischen Widerstands vom Druck machen die Verf. folgende, nicht weiter begründete Hypothesen. 1. Die Zahl der Leitungselektronen pro Atom sei gleich der Ladung, die außerhalb eines mittleren Atomradius (aus dem Kristallvolumen berechnet, d. h. von der Dichte abhängig) zu liegen kommt, wenn man sie für ein isoliertes Atom nach der Thomas-Fermi-Methode berechnet. 2. Die freie Weglänge der Elektronen nehme bei Kompression ab, proportional zu der Dichte der Leitungselektronen. Bei Einsetzen in die Sommerfeldsche Formel für die Leitfähigkeit ergibt sich eine Beziehung, mit der man das empirische Verhalten ganz gut wiedergeben kann. *Nordheim* (Göttingen).

Scherzer, Otto: Über die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen. *Ann. Physik*, V. F. **13**, 137—160 (1932).

Im Anschluß an eine Sommerfeldsche Arbeit über die Beugung und Bremsung der Elektronen an nackten Kernen (vgl. dies. Zbl. **3**, 142) wird dasselbe Problem für positive Partikel beliebiger Masse durchgeführt. Der Einfluß der verschiedenen Masse und des Vorzeichenwechsels wird getrennt behandelt. Die erhebliche Intensitätsverringerung des Bremsspektrums im Vergleich zum Elektronenbremsspektrum wird hauptsächlich durch den Vorzeichenwechsel der Ladung verursacht. Der Intensitätsfaktor, der zu den Sommerfeldschen Formeln hinzukommt, wird angegeben. Ferner wird die Wahrscheinlichkeit der Streuung von Elektronen in eine bestimmte Richtung und Emission eines Lichtquants bestimmter Polarisierung in einen vorgegebenen Raumwinkel berechnet. Die Resultate einer relativistischen Behandlung des Elektronenbremsspektrums werden mitgeteilt.

M. Stobbe (Bristol).

Maue, A.-W.: Das kontinuierliche und kontinuierlich-diskrete Röntgenspektrum nach der Theorie von Kramers und nach der Wellenmechanik. *Ann. Physik*, V. F. **13**, 161—190 (1932).

Der Vergleich der älteren auf korrespondenzmäßigen Betrachtungen beruhenden Kramersschen Theorie des kontinuierlich-kontinuierlichen und kontinuierlich-diskreten Röntgenspektrums und der quantenmechanischen Formeln von Sommerfeld (vgl. dies. Zbl. **3**, 142) und Gordon [*Ann. Physik* **2**, 1031 (1929)] wird durchgeführt. Im allgemeinen findet sich Übereinstimmung beider Theorien für kleine Frequenzen ($h\nu \rightarrow 0$), d. h. für langsame Elektronen an der langwelligen Grenze des diskreten Spektrums (kont. $\rightarrow n \gg 1$) und im langwelligen Gebiet des kontinuierlichen Spektrums (kont. \rightarrow kont.). Für schnelle Elektronen und Übergang nach dem diskreten Spektrum liefert die Kramerssche Theorie zu große Intensitäten. Die Polarisationsverhältnisse in der Kramersschen Theorie stimmen im allgemeinen mit den quantenmechanischen Resultaten überein, solange die Intensitäten nach beiden Theorien dieselben sind.

M. Stobbe (Bristol).

Curie, Maurice: Sulfures phosphorescents: Intervention des choes de seconde espèce. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **194**, 1566—1568 (1932).

Es wird versucht, die Existenz von Phosphoreszenzbanden langer Lebensdauer durch die Annahme zu deuten, daß ein angeregter molekularer Komplex durch Stöße zweiter Art in einen metastabilen Zustand versetzt wird. Diese Auffassung gestattet auch eine Erklärung der Tatsache, daß der Photoeffekt im Anregungsmaximum der Bande seinen größten Wert erreicht.

G. Beck (Wien).

Geophysik.

● **Dock, Hans:** Rechnerische und zeichnerische Auswertung terrestrischer stereophotogrammetrischer Aufnahmen. Wien u. Leipzig: Carl Gerold's Sohn 1932. 100 S. u. 52 Fig. S. 10.—

Nach einer kurzen Einleitung über „Stereoskopisches Sehen und Messen“ werden die einfachen stereoskopischen Meßgeräte, das Stereomikrometer und der Stereokomparator von Zeiß und Hegershoff, einschließlich ihrer Handhabung und Justierung besprochen. Dann wird die rechnerische und zeichnerische Auswertung von stereophotogrammetrischen Aufnahmen mit wagrechten und gekippten Achsen behandelt, wobei der Verf. einen von ihm erfundenen logarithmischen Kreisrechenschieber als Rechenhilfsmittel empfiehlt. Die bekannten Verfahren werden durch einige Abänderungen ergänzt. Ein Schlußkapitel erörtert die stereoskopische Betrachtung und Vermessung eines Objekts und seines Spiegelbilds. Hierbei werden die Aufnahmeachsen gegen die spiegelnde Fläche geneigt oder zu ihr parallel angenommen, was dem Konvergenz- bzw. Normalfall der terrestrischen Photogrammetrie entspricht.

R. Finsterwalder (Hannover).

Ertel, H.: Zur Theorie des Erdstroms. Veröff. preuß. meteorol. Inst. Nr 387, 105—109 (1932).

The paper relates to equations used by Chapman and Whitehead [Trans. Camb. Phil. Soc. 22, 463 (1922)] in their discussion of the horizontal electric potential gradients in the outer layers of the earth's crust, induced by the varying magnetic field. They deduced these equations by assuming that the Lorentz field-potential was zero, thus ignoring electrostatic effects. The writer deduces the same equations on the basis of different assumptions, referring only to the uppermost layers of the lithosphere and hydrosphere. These are that, in these layers, the variation of the conductivity in the horizontal direction is small compared with the corresponding variation of the electric field strength; and the vertical variation of the vertical component of electric field strength is small compared with the horizontal variation of the horizontal component. In the discussion it is pointed out, following Bartels, that the first assumption is not true for Tortosa, where there exists a discrepancy, indicated by Chapman and Whitehead [Terr. Mag. 28, 125 (1923)] between the magnitudes of the observed and calculated daily variation of earth potential gradient, which, however, agree in form. In a Note added later, the writer states that he has obtained a solution of the problem taking account of variable conductivity, and that the discrepancy for Tortosa can be removed if the conductivity near Tortosa is assumed to be 1.6 times the mean value over the continent.

S. Chapman (London).

Peters, Leo J., and John Bardeen: Some aspects of electrical prospecting applied in locating oil structures. (Res. Dep., Gulf Companies, Pittsburgh, Pa.) Physics 2, 103 bis 122 (1932).

Les principes de prospection électrique sont exposés en omettant le côté expérimental et les nombreuses difficultés que l'on rencontre dans la pratique. L'application de l'analyse mathématique est illustrée sur des exemples simples qui permettent la résolution complète du problème mathématique et qui présentent un grand intérêt pratique. La fréquence optima de courants alternatifs est étudiée (Chap. III) et l'on voit pourquoi les basses fréquences sont préférables pour situer un bon conducteur caché dans le sous-sol. Les exemples de prospections faites sont ceux connus et publiés déjà. La puissance de la méthode en profondeur indiquée dans la conclusion semble exagérée.

E. Kogbeliantz (Paris).

Malurkar, S. L., and L. A. Ramdas: Theory of extremely high lapse-rates of temperature very near the ground. Indian J. Physics a. Proc. Indian Assoc. Sci. 15, 495 bis 508 (1932).

Zur Erklärung des ungewöhnlich großen Temperaturgradienten in Erdbodennähe, wie er z. B. von den Verff. festgestellt worden ist, wird unter Berücksichtigung der Wärmeleitung, der Konvektion und der Strahlung eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung für die Temperaturverteilung mit der Höhe z in Erdbodennähe aufgestellt, deren Lösung ist: $\varphi_0 \cdot \sinh a(h - z) / \sinh ah$ (φ_0 : Temperaturkonstante; h : Dicke der Luftschicht an der Erdoberfläche; a : Konstante, die aus der Strahlung, der Konvektion und der Absorption der Strahlung infolge von Wasserdampf resultiert.) Die theoretische Ableitung stimmt mit der beobachteten Temperaturverteilung gut überein.

Fritz Hänsch (Köln).

Mügge, R., und F. Möller: Zur Berechnung von Strahlungsströmen und Temperaturänderungen in Atmosphären von beliebigem Aufbau. (Univ.-Inst. f. Meteorol. u. Geophys., Frankfurt a. M.) Z. Geophys. 8, 53—64 (1932).

Es wird unter Zusage der üblichen Gesetze der Ausstrahlung (Plancksche Strahlungsformel usw.) und des exponentiellen Absorptionsgesetzes für jedes elementare Parallelbündel die von w cm Niederschlagswasser absorbierte Sonnenstrahlung ($\text{gcal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1}$) durch graphische Integration für $w = 0,5; 1,0; 1,5; 2,0; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0; 7,0; 8,0$ berechnet und in die empirische Formel $0,1720 \cdot w^{0,3208}$ zusammengefaßt. Die so berechneten Werte weichen von den nach Fowle beobachteten im

betrachteten Bereich um weniger als 1% ab. Mit Hilfe der besagten empirischen Formel berechnet sich durch graphische Integration die im Laufe von 24 Stunden absorbierte Sonnenenergie (in der Schicht dw) zu $0,0521 w^{-0,6972} dw \cdot 2 \int_0^{\tau} (\cos z)^{0,6972} d\tau$, wo z die (mit der Tageszeit veränderliche) Zenitdistanz der Sonne am Beobachtungsort, τ durch den Sonnenaufgang ($\cos z = 0$) gegeben sind. Am Pol zur Zeit der Sommer-sonnenwende ist danach die Erwärmung das 1,6fache derjenigen am Erdäquator.
L. Tuwim (z. Zt. Paris).

Kolhörster, Werner: Zur Prüfung der Theorie des vertikalen Zählrohreffekts der Höhenstrahlung. (*Höhenstrahlungslabor., Meteorol.-Magnet. Observ., Potsdam.*) S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 5, 39—43 (1932).

Die Bedeutung des von Tuwim aufgefundenen vertikalen Zählrohreffektes für die experimentelle Erforschung der Höhenstrahlung macht eine Nachprüfung in weitem Umfange wünschenswert. Ein von Tuwim aus der Reihenentwicklung nach Zählrohrfunktionen abgeleitete Näherungsformel besagt, daß die Abhängigkeit der Stoßzahl vom Quadrat des Sinus des Neigungswinkels der Zählrohrachse zur Vertikalen bei graphischer Darstellung eine Gerade sein muß. Das Experiment bestätigt die Richtigkeit der Theorie, wie mehrere Meßreihen bei verschiedenen Luftdrücken beweisen, und zwar sowohl bei einem frei in der Luft als auch bei einem hinter 10 cm Blei befindlichen Rohr. Die gemessenen Geraden gestatten die Bestimmung des Massenabsorptionskoeffizienten der Höhenstrahlung auf zwei verschiedenen Wegen, nämlich einmal mittels des vertikalen Zählrohreffektes und ferner mittels des Barometereffektes. Der erste Weg liefert $(\mu/\rho)_{\text{H}_2\text{O}} = 1,69 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ in freier Luft und $(\mu/\rho)_{\text{H}_2\text{O}} = 8,12 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ bei 10 cm Bleifilterung. Der zweite Weg $(\mu/\rho)_{\text{H}_2\text{O}} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$ in freier Luft. Die gute Übereinstimmung der Werte spricht dafür, daß es sich bei dem Barometereffekt um einen reinen Absorptionseffekt handelt. Da man für jeden Barometerstand eine vollständige Gerade an Stelle eines einzelnen Meßpunktes, welchen z. B. Ionisationskammern nur zu liefern imstande sind, erhält, läßt sich der Barometereffekt auf diese Weise mit großer Genauigkeit ermitteln. Die Messungen lassen u. a. noch die geringe Zerstreuung der Höhenstrahlen erkennen. Hummel (Göttingen).

Prandtl, L.: Meteorologische Anwendung der Strömungslehre. Beitr. Physik frei. Atmosph. 19, 188—202 (1932).

Mehrere aktuelle meteorologische Probleme: Turbulente Strömungen in Bodennähe, thermische Konvektion usw. werden von Prandtl vom Standpunkt der Strömungslehre aus diskutiert. Für die Geschwindigkeitsverteilung einer turbulenten Luftströmung in Bodennähe kann die Formel

$$u = 2,5 \sqrt{\frac{\tau}{\rho} \cdot \ln(z/z_0)}$$

abgeleitet werden (ρ = Dichte, τ = konst. Schubspannung, z = vertikaler Abstand von der Erdoberfläche, z_0 = Integrationskonstante), die zeigt, daß die in der Meteorologie üblichen Potenzformeln als Interpolationsformeln zu werten sind. Dagegen kann z. B. die Steiggeschwindigkeit erwärmter Luftkörper bei thermischer Konvektion, wie P. zeigt, unter Umständen durch ein Potenzgesetz dargestellt werden. Ferner wird der für viele meteorologische Fragen (Seewind, Großstadteinfluß) wichtige Fall behandelt, daß eine Luftmasse mit der gleichmäßigen Horizontalgeschwindigkeit U plötzlich auf ein Gebiet größerer Grenzflächenreibung kommt; die Höhe $h(t)$, bis zu der die Turbulenz zur Zeit t vorgedrungen ist, kann aus $h(t) = z_0 \cdot F\left(\frac{U \cdot t}{z_0}\right)$ mit Hilfe der von P. graphisch dargestellten Funktion $F\left(\frac{U \cdot t}{z_0}\right)$ ermittelt werden. — Einige Gedanken zur allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre bilden den Abschluß der interessanten Arbeit.
Ertel (Berlin).

Haurwitz, B.: Über Wellenbewegungen an der Grenzfläche zweier Luftschichten mit linearem Temperaturgefälle. Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 47–54 (1932).

Für die an der (horizontalen) Grenze zweier Luftmassen mit verschiedenen Temperaturgradienten auftretenden kurzen Wellen wird mittels der Bjerknesschen Störungsgleichungen die Frequenzgleichung (Beziehung zwischen Periode und Wellenlänge) abgeleitet und diskutiert. Bei gleichbleibender Wellenlänge wächst die Wellengeschwindigkeit mit abnehmendem Temperaturgradienten, also mit zunehmender Stabilität. Ertel (Berlin).

Kotschin, N.: Über die Beschleunigung der Diskontinuitätslinien und der Diskontinuitätsflächen in der Atmosphäre. Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 7–16 (1932).

Die Beschleunigung geradliniger Fronten mit reiner Translationsbewegung wurde von A. Gião 1929 bereits untersucht (Mém. l'Office Nat. Météorol. France **20**); Kotschin behandelt hier den allgemeinen Fall krummliniger, sich bei der Bewegung drehender Fronten. Für Fronten (F) auf der horizontalen Erdoberfläche wird folgender Ausdruck für die Beschleunigung W_F abgeleitet:

$$W_F = -2\left(\Omega_z + \frac{\partial N_F}{\partial x}\right)u^* - \frac{u^{**}}{R} - \operatorname{tg} \theta \cdot (g - 2\Omega_y u^* + 2\Omega_x v^*),$$

worin bedeuten: x, y horizontale Koordinaten, z positiv nach oben; $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ = Komponenten des Drehvektors der Erddotation; g = Schwerkraftbeschleunigung; θ = Neigungswinkel der Diskontinuitätsfläche; N_F = Normal- (= y -) Komponente der Frontengeschwindigkeit; R = Krümmungsradius der Front; u^* usw. stehen zur Abkürzung für

$$u^* = \frac{[\varrho u]}{[\varrho]}; \quad v^* = \frac{[\varrho v]}{[\varrho]}; \quad u^{**} = \frac{[\varrho u^2]}{[\varrho]};$$

worin ϱ = Dichte und [...] den Sprung der eingeklammerten Größen an der Diskontinuitätsfläche bedeuten. Die obige Formel gilt auch für Fronten auf der sphärischen Erdoberfläche, wenn R durch $R \cdot \sec \chi$ ersetzt wird, worin χ den Winkel bedeutet, den die Schmiegungsebene der Kurve F mit der x, y -Ebene einschließt.

Ertel (Berlin).

Fujiwhara, S.: On the preponderance of horizontal motion in the earth's atmosphere. Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 1–6 (1932).

Eine Studie über die Gründe des Vorherrschens der Horizontalbewegung in der Atmosphäre, die nach Fujiwhara 1. in der stabilen Schichtung der Atmosphäre im irdischen Schwerfeld und 2. in dem Überwiegen der horizontalen Dimensionen (x, y) über die vertikale (z) zu suchen sind. In der Tat gibt eine vereinfachte Integration der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen bei adiabatischer Bewegung für die vertikale Geschwindigkeitskomponente w :

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)} \cdot z,$$

worin $\alpha = g/\kappa R$, $\kappa = 1,4$, g = Schwerkraftbeschleunigung, R = Gaskonstante, $\beta = -\frac{\partial T}{\partial z}$. Da $\alpha \approx 2,5^\circ \text{C}/100 \text{ m}$ wird bei mittlerem $\beta \approx 0,5^\circ \text{C}/100 \text{ m}$

$$\frac{w}{z} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

d. h. die Geschwindigkeiten stehen ungefähr in demselben Verhältnis wie die entsprechenden Lineardimensionen. Ertel (Berlin).

Stüve, G.: Über lineare Deformationsfelder. Beitr. Physik frei. Atmosph. **19**, 250 bis 271 (1932).

Velocity fields are considered in which the partial derivatives of the component velocities u, v, w are constants. In a horizontal section of the field by a plane $z = 0$ only the variations of u and v need be considered and the geometrical properties of the field depend largely on the sign of J , the Jacobian of u and v with respect to x and y . If the direction of motion makes an angle α with the x -axis, the isogonal lines for which α is constant are straight and their direction increases or decreases with α according as

J is positive or negative. An equation is obtained for the stream-lines and it is found that there are different cases depending on the sign of the expression $4u_x v_y + (u_x - v_y)^2$. These are illustrated by diagrams and the limiting cases are considered. A special study is made also of fields free from vortices and fields free from sources. — In the atmosphere the motion is threedimensional but $w = 0$ at the earth's surface. A study is made of the lines of strongest vertical motion and the places where a discontinuity of temperature can occur.

H. Bateman (Pasadena).

Baur, Franz: Die Formen der atmosphärischen Zirkulation in der gemäßigten Zone. Gerlands Beitr. Geophys. 34, Köppen-Bd. 3, 264—309 (1931).

Kristallographie.

Reinicke, Richard: Raumgeometrische Vorstellungen als Grundlage für Auswahlprinzipien. Mh. Math. Phys. 39, 139—148 (1932).

Ausführlichere Darstellung des mathematischen Anteils der in dies. Zbl. 2, 111 referierten Arbeit des gleichen Verf. über „Atomare Wirkungsbereiche mit Tetraedersymmetrie als gemeinsames Bauelement der sämtlichen Kristallgitter“. Es wird die Anzahl und räumliche Anordnung der einen Diamantgitterkomplexpunkt umgebenden anderen Gitterkomplexe in Abhängigkeit vom Abstand untersucht.

F. Laves (Göttingen).

Zwicky, F.: Secondary structure and mosaic structure of crystals. (California Inst. of Technol., Pasadena.) Physic. Rev., II. s. 40, 63—77 (1932).

Anknüpfend an frühere Arbeiten gibt der Verf. eine Übersicht über verschiedene Möglichkeiten unidealen Kristallaufbaues. Er unterscheidet thermisch stabilen, aber dynamisch instabilen Aufbau, die „Secondary Structure“, und thermisch pseudostabilen Aufbau, die „Mosaic Structure“. Verschiedene Spezialfälle werden unter Berücksichtigung qualitativer energetischer Überlegungen auf ihre Existenzmöglichkeit hin untersucht. Unter Secondary Structure wird beispielsweise ein Gitter verstanden, durch welches sich ideale Gittergeraden oder Gitterebenen gegenseitig durchdringend hindurchziehen, welche Gebiete deformierter Kristallsubstanz umschließen. Es wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Secondary Structure in eine Mosaic Structure übergehen wird (z. B. beim Freiwerden der Kristallisationswärme ergeben sich partiell verschiedene Ausdehnungen und entsprechend Deformationen usw.). Es werden weiterhin verschiedene Eigenschaften wie plastische Deformation, Härtung, periodisches Wachstum usw. qualitativ erklärt.

F. Laves (Göttingen).

Laves, F.: Zur Klassifikation der Silikate. Geometrische Untersuchungen möglicher Silicium-Sauerstoff-Verbindungen als Verknüpfungsmöglichkeiten regulärer Tetraeder. (Mineral. Inst., Univ. Göttingen.) Z. Kristallogr. 82, 1—14 (1932).

Unter den Voraussetzungen, daß 1. jedes Si von 4 O-Atomen tetraedrisch umgeben wird (alle Tetraeder gleich groß), 2. zwei Tetraeder höchstens eine Ecke gemein haben und auch jedes O-Atom höchstens zwei Tetraedern angehört, 3. die Bindungen für alle Tetraeder gleich sind, werden die möglichen Dimensionszahlen der Bauzusammenhänge der Silicium-Sauerstoff-Verbindungen abgeleitet. Es gibt dabei nur 4 Fälle verschiedenen stöchiometrischen Verhältnisses, nämlich Si:O = 1. 1:4, 2. 1:3, 3. 2:5 und 4. 1:2. Für jeden dieser Fälle sind folgende Dimensionszahlen der Bauzusammenhänge möglich: 1. 0; 2. 0, 1; 3. 0, 1, 2, 3 und 4. 1, 2, 3. D. h. z. B. für den letzten Fall: in einer SiO₂-Verbindung, in der die obigen Voraussetzungen realisiert sind, treten Ketten, Netze oder Baugitter auf. Überraschend an dem Ergebnis ist das vorzeitige Auftreten von Baugittern schon im Falle 3, wo man als Höchstfall Netze vermuten würde. Die genaue Erörterung dieses Falles führt den Verf. zur Entdeckung von räumlichen Kugellagerungen mit der Koordinationszahl 3 sowie einer weiteren mit der Koordinationszahl 4, die von geringerer Dichte als die des Diamanten ist. Heesch (Göttingen).